

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра фізики ядра та високих енергій імені О.І. Ахієзера

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Директор навчально-наукового інституту

«Фізико-технічний факультет»

(вказати назву структурного підрозділу)

Кузнєцов І.В.

(вказати П.І.Б керівника)

2023 р.

## РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### Вища математика (вища алгебра)

(назва навчальної дисципліни)

рівень вищої освіти	1 рівень (бакалаврський)
галузь знань	10 «Природничі науки»
спеціальність	105 «Прикладна фізика та наноматеріали»
освітня програма	Прикладна фізика, Біомедичні нанотехнології Кіберфізичні ядерні технології
спеціалізація	
вид дисципліни	обов'язкова
факультет	ННІ «Фізико-технічний факультет»

2023/2024 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою Навчально наукового інституту «Фізико-технічний факультет»

“25” серпня 2023 року, протокол № 8

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ: (вказати авторів, їхні наукові ступені, вчені звання та посади)  
**Гах Андрій Генадійович** кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики ядра та високих енергій імені О. І. Ахієзера,

**Наумовець Артем Сергійович** кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики ядра та високих енергій імені О. І. Ахієзера.

Програму схвалено на засіданні кафедри фізики ядра та високих енергій імені О.І. Ахієзера

Протокол від “16” червня 2023 року № 10

Завідувач кафедри фізики ядра та високих енергій імені О.І. Ахієзера



(підпис)

Микола ШУЛЬГА

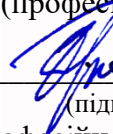
(прізвище та ініціали)

Програму погоджено з гарантом освітньо-професійної програми

Прикладна фізика

(назва освітньої програми)

Гарант освітньої (професійної) програми



(підпис)

Ігор ГІРКА

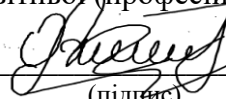
(прізвище та ініціали)

Програму погоджено з гарантом освітньо-професійної програми

Біомедичні нанотехнології

(назва освітньої програми)

Гарант освітньої (професійної) програми



(підпис)

Ольга ЖИТНЯКІВСЬКА

(прізвище та ініціали)

Програму погоджено з гарантом освітньо-професійної програми

Кіберфізичні ядерні технології

(назва освітньої програми)

Гарант освітньої (професійної) програми



(підпис)

Пилип КУЗНЄЦОВ

(прізвище та ініціали)

Програму погоджено науково-методичною комісією ННІ «Фізико-технічний факультет»

(назва факультету, для здобувачів вищої освіти якого викладається навчальна дисципліна)

Протокол від “14” серпня 2023 року № 11

Голова науково-методичної комісії ННІ «Фізико-технічний факультет»



(підпис)

Микола ЮНАКОВ

(прізвище та ініціали)

## ВСТУП

Програму навчальної дисципліни «Вища математика (Вища алгебра)» складено відповідно до освітньо- професійної програми підготовки першого рівня вищої освіти (бакалавр). Галузь знань: 10 — “Природничі науки”. Спеціальність: 105 - «Прикладна фізика та наноматеріали». Освітня програма: “Прикладна фізика”, “Медична фізика”, “Біомедичні нанотехнології”. При розробці Програми враховані вимоги Стандарту вищої освіти першого (бакалаврського) рівня, галузі знань 10 - “Природничі науки”, спеціальності 105 - “Прикладна фізика та наноматеріали”, затвердженого наказом МОН України № 804 від 16.06.2020 р.

### 1. Опис навчальної дисципліни

#### 1.1 Мета викладання навчальної дисципліни

Засвоїти теоретичні основи курсу та отримати практичні навички розв’язання задач. Створити практичну основу для розуміння студентами математичного апарату теоретичної фізики. Сформувані у студентів загальну та предметну компетентність.

#### 1.2 Основні завдання вивчення дисципліни

Курс лекцій з вищої алгебри є органічною частиною базової підготовки з вищої математики для студентів фізико- технічних спеціальностей університету. Він дає узагальнення для подальшої роботи з різноманітними математичними об’єктами (матрицями, лінійними просторами алгебраїчними формами, тощо), елементарні уявлення про частину з яких студенти уже мають з курсів математичного аналізу та аналітичної геометрії. Окрім того він закладає основу математичного апарату майбутнього фізика, зокрема операторного та тензорного числення. Курс лекцій з вищої алгебри розраховано на два навчальні семестри (другий та третій). Протягом першого семестру студенти знайомляться з лінійними просторами, матрицями, алгебраїчними формами, визначниками, системами лінійних рівнянь та операторами. У другому семестрі пропонується практичне узагальнення математичного оперування з зазначеними об’єктами і закладаються основи теорії груп та тензорного аналізу.

Загальні компетентності, які мають бути засвоєні внаслідок вивчення вищої математики (вищої алгебри):

- Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях. **(ЗК-1)**
- Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел. **(ЗК-7)**
- Здатність працювати автономно. **(ЗК-9)**

Фахові компетентності, які мають бути засвоєні внаслідок вивчення вищої математики (вищої алгебри):

- Здатність використовувати сучасні теоретичні уявлення в галузі фізики для аналізу фізичних систем. **(СК-6)**
- Здатність використовувати методи і засоби теоретичного дослідження та математичного моделювання в професійній діяльності. **(СК-7)**
- Здатність виконувати обчислювальні експерименти, використовувати чисельні методи для розв’язування фізичних задач і моделювання фізичних систем **(СК-10)**

1.3 Кількість кредитів: 7.

1.4 Загальна кількість годин: 210.

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Обов'язкова	
Денна форма навчання	
Рік підготовки	
1-й	2-й
Семестр	
2-й	3-й
Лекції	
32 год.	32 год.
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	16 год.
Лабораторні заняття	
год.	год.
Самостійна робота	
56 год.	42 год.
Індивідуальні завдання	
2 год.	3 год.

1.6. Заплановані результати навчання

Структура курсу “Вища алгебра” та її органічний зв'язок з курсами “Аналітична геометрія” та “Математичний аналіз”. Короткий огляд навчальної літератури за тематикою лекцій. Зв'язок абстрактних алгебраїчних об'єктів з властивостями реальних фізичних тіл та методами дослідження фізичних явищ. Класична структура лекцій з вищої алгебри та особливості основних складових курсу, який пропонується. Задачі з вищої алгебри як практичне засвоєння теоретичного матеріалу та опанування математичним апаратом розв'язування фізичних задач.

Згідно з освітньо-професійною програмою «Прикладна фізика», спеціальність 105 – «прикладна фізика та наноматеріали» студенти мають досягти таких результатів навчання:

- Знати цілі сталого розвитку та можливості своєї професійної сфери для їх досягнення, в тому числі в Україні. **(Зн-2)**
- Розуміти закономірності розвитку прикладної фізики, її місце в розвитку техніки, технологій і суспільства, у тому числі в розв'язанні екологічних проблем. **(Зн-3)**
- Застосовувати сучасні математичні методи для побудови й аналізу математичних моделей фізичних процесів. **(Ум-1)**
- Застосовувати фізичні, математичні та комп'ютерні моделі для дослідження фізичних явищ, розробки приладів і наукоємних технологій. **(Ум-3)**
- Оцінювати фінансові, матеріальні та інші витрати, пов'язані з реалізацією проектів у сфері прикладної фізики, соціальні, екологічні та інші потенційні наслідки реалізації проектів. **(Ком-4)**

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

### Розділ 1. Лінійні простори.

*Тема 1.* Операції на множинах. Визначення групи. Визначення та аксіоми поля. Визначення та аксіоми лінійного простору. Приклади лінійних просторів. Визначення підпростору лінійного простору.

*Тема 2.* Визначення лінійної оболонки системи векторів. Повні та лінійно незалежні системи векторів. Зв'язок між повними та лінійно незалежними системами векторів. Базис та розмірність лінійного простору.

*Тема 3.* Координати вектора у заданому базисі. Ізоморфізм лінійних просторів. Лінійне різноманіття, його базис та розмірність. Сума, перетин та пряма сума підпросторів. Формула Грассмана.

## **Розділ 2. Алгебра матриць.**

*Тема 4.* Лінійний простір матриць. Визначення алгебри. Алгебра матриць. Операції транспонування, комплексного та ермітового спряження.

## **Розділ 3. Евклідові та унітарні простори.**

*Тема 5.* Визначення евклідового простору. Нерівність Коши-Буняковського. Довжина вектора та кут між векторами у евклідовому просторі. Ортонормовані системи векторів. Процес ортогоналізації. Ізоморфні евклідові простори.

*Тема 6.* Визначення унітарного простору. Ортогональне доповнення до підпростору. Властивості ортогонального доповнення до підпростору. Ортогональна проекція вектора на підпростір та ортогональна складова вектора до підпростору.

## **Розділ 4. Метричні та нормовані простори.**

*Тема 7.* Визначення метричного простору. Границя послідовності метричного простору. Кулі та обмежені множини у метричному просторі. Повнота у метричному просторі. Визначення нормованого простору. Зв'язок між метричним та нормованим просторами. По координатна збіжність та збіжність за нормою. Повнота нормованих просторів.

## **Розділ 5. Теорія визначників.**

*Тема 8.* Лінійний функціонал у лінійному просторі. Простір лінійних функціоналів. Білінійні функціонали. Симетричні та антисиметричні білінійні функціонали. Полі лінійні функціонали. Визначник квадратної матриці. Властивості визначників.

*Тема 9.* Мінори та алгебраїчні доповнення. Теорема Лапласа. Методи обчислення визначників  $n$ -го порядку: а) метод приведення до трикутного вигляду; б) метод виділення лінійних множників; в) метод представлення визначника у вигляді суми визначників; г) метод рекурентних співвідношень; д) метод змінювання елементів визначника.

## **Розділ 6. Системи лінійних рівнянь.**

*Тема 10.* Формули Крамера. Обернена матриця та методи знаходження оберненої матриці.

*Тема 11.* Ранг матриці. Базисний мінор. Теорема про базисний мінор. Перетворення, які не змінюють ранг матриці. Простір розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь, його розмірність.

*Тема 12.* Теорема Кронекера-Капеллі. Теорема про загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків. Метод Гауса. Альтернатива Фредгольма.

## **Розділ 7. Білінійні та квадратичні форми.**

*Тема 13.* Білінійний функціонал. Його матриця. Квадратичні форми та їх зв'язок з білінійними формами. Класифікація квадратичних форм. Канонічний вигляд квадратичної форми. Метод Лагранжа. Метод Якобі приведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Критерій Сильвестра додатно та від'ємно визначеної квадратичної форми. Закон інерції квадратичних форм.

## **Розділ 8. Лінійні оператори.**

*Тема 14.* Визначення лінійного оператора. Дії з лінійними операторами. Лінійний простір та алгебра лінійних операторів. Зв'язок лінійних операторів з матрицями. Закон множення матриць.

*Тема 15.* Ядро та образ лінійного оператора. Обернений оператор. Необхідна та достатня умова існування оберненого оператора. Підпростори, інваріантні відносно лінійного оператора.

*Тема 16.* Власний вектор та власні значення лінійного оператора. Зв'язок інваріантних підпросторів та власних векторів лінійного оператора. Характеристичний багаточлен лінійного оператора та зв'язок його коренів з власними значеннями оператора у евклідовому та унітарному просторах. Спектральні властивості лінійного оператора. Теореми про існування інваріантних підпросторів у комплексному та дійсному лінійних просторах.

### **Розділ 9. Перетворення при зміні базису.**

*Тема 17.* Матриця переходу від одного базису до іншого. Перетворення координат векторів при зміні базису. Перетворення матриці лінійного оператора. Перетворення коефіцієнтів лінійних форм. Перетворення матриці білінійної форми. Послідовні перетворення при зміні базису.

### **Розділ 10. Лінійні оператори у евклідових та унітарних просторах.**

*Тема 18.* Теорема про спеціальне представлення лінійних форм в унітарних просторах. Визначення півторалінійної форми в унітарному просторі. Теореми про спеціальне представлення півторалінійних форм в унітарному просторі.

*Тема 19.* Визначення спряженого оператора. Властивості спряжених операторів. Ермітові (самоспряжені) оператори. Теорема про спеціальне представлення лінійного оператора. Спектральні властивості ермітового оператора. Визначення норми лінійного оператора у лінійному нормованому просторі. Необхідна та достатня умова ермітовості лінійного оператора. Теорема про норму ермітового (самоспряженого) оператора.

*Тема 20.* Теорема про власний базис ермітового оператора. Мінімаксна властивість власних значень ермітового оператора. Оператори-проектори на одномірний підпростір. Властивості операторів-проекторів. Спектральне розкладання ермітового оператора. Теорема Гамільтона-Келі. Додатні (додатно визначені) оператори. Теорема про власні значення додатного (додатно визначеного) оператора. Корінь  $m$ -го ступеня з оператора. Теорема про існування кореня  $m$ -го ступеня з додатного ермітового оператора. Загальний вигляд матриці лінійного оператора у базисі з власних векторів.

*Тема 21.* Визначення ермітової півторалінійної форми. Необхідна та достатня умова ермітовості півторалінійної форми. Визначення квадратичної форми в унітарному просторі та її зв'язок з півтора лінійною формою. Теорема про приведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Теорема про приведення пари форм до канонічного вигляду. Визначення унітарного оператора. Спектральні властивості унітарного оператора. Необхідна та достатня умова унітарності лінійного оператора. Визначення нормального оператора. Зв'язок між унітарними та нормальними операторами. Теорема про власні вектори та власні значення нормального оператора та оператора, спряженого до нього. Теорема про власний базис нормального оператора.

*Тема 22.* Жорданова клітина та жорданова матриця. Теорема про нормальну жорданову форму лінійного оператора. Схема побудови жорданового базису лінійного оператора. Зв'язок між власними значеннями лінійного оператора у евклідовому просторі та коренями характеристичного багаточлена. Визначення білінійної та квадратичної форм у евклідовому просторі. Зв'язок між ними. Теорема про корені характеристичного багаточлена самоспряженого лінійного оператора у евклідовому просторі.

*Тема 23.* Теорема про власний базис самоспряженого оператора у лінійному евклідовому просторі. Визначення ортогонального оператора. Необхідна та достатня умова ортогональності лінійного оператора. Загальний вигляд ортогонального оператора в одновимірному просторі. Загальний вигляд ортогонального оператора у двовимірному просторі. Загальний вигляд ортогонального оператора у  $n$ -вимірному просторі. Екстремальні властивості квадратичної форми у евклідовому просторі.

### **Розділ 11. Елементи теорії груп.**

*Тема 24.* Визначення групи. Адіативна та мультиплікативна форми запису. Група симетрій ромба. Група самозміщень правильного трикутника. Група перестановок (симетрична група)  $S_n$ . Визначення циклічної групи. Властивості груп, що впливають з аксіом групи. Ізоморфні групи.

*Тема 25.* Визначення лівих та правих суміжних класів підгрупи  $H$  у групі  $G$ . Властивості суміжних класів. Визначення нормального дільника групи. Визначення гомоморфізму. Теорема про гомоморфний образ групи. Визначення фактор- групи  $G$  за нормальним дільником  $H$ .

*Тема 26.* Група  $GL(n)$  невідроджених лінійних перетворень  $n$ - вимірного лінійного простору. Ортогональна група евклідового простору  $O(n)$ . Власна ортогональна група  $SO(n)$  евклідового простору. Унітарна група  $U(n)$  унітарного простору. Визначення псевдоевклідового простору  $E^n(p,q)$ . Перетворення Лоренца. Загальна група Лоренца  $L(n;p,q)$ . Повна група Лоренца  $L_{\uparrow}(n)$ . Власна група Лоренца  $L_+(n)$ . Група Лоренца  $L_{\dagger}(n)$ .

*Тема 27.* Визначення лінійного представлення груп. Звідні та незвідні представлення. Характери. Спряжені елементи групи. Властивості спряжених елементів. Приклади представлення груп.

### **Розділ 12. Елементи теорії тензорів.**

*Тема 28.* Взаємні базиси евклідового простору. Коваріантні та контраваріантні координати векторів. Формули Гіббса. Формули перетворення базисних векторів при зміні базису. Перетворення коваріантних та контраваріантних координат при зміні базису. Визначення тензора рангу  $r$  типу  $(p,q)$ . Тип тензорів матриці білінійної форми та матриці лінійного оператора.

*Тема 29.* Основні операції над тензорами. Визначення афінного ортогонального тензора. Операції над афінними ортогональними тензорами. Ознака тензорності величини.

*Тема 30.* Симетричні та антисиметричні тензори. Визначення псевдотензора. Алгебраїчний символ Леві- Чівіта. Згортання добутку двох символів Леві- Чівіта.

*Тема 31.* Визначення тензорного поля рангу  $r$ . Градієнт тензорного поля рангу  $r$ . Дивергенція тензорного поля рангу  $r$ . Ротор тензорного поля рангу  $r$ . Лапласіан тензорного поля рангу  $r$ . Потік тензорного поля через поверхню. Формула Гаусса-Остроградського для тензорних полів. Формула Стокса для тензорних полів.

### **Розділ 13. Елементи теорії гільбертових просторів.**

*Тема 32.* Визначення нескінченновимірного евклідового простору. Визначення нормованого простору. Приклади ортонормованих систем в  $E_{\infty}$ . Ряд Фур'є для функції  $f(x)$  по ортонормованій системі функцій. Теорема про найкраще наближення функції  $f(x)$  скінченною лінійною комбінацією по заданій ортонормованій системі. Тотожність Бесселя. Нерівність Бесселя. Замкнені системи векторів. Повні системи векторів. Збіжність за нормою та слабка збіжність в  $E_{\infty}$ . Фундаментальні та слабкофундаментальні послідовності в  $E_{\infty}$ . Компактні та слабко компактні множини в  $E_{\infty}$ . Зв'язок між обмеженістю множини в  $E_{\infty}$ , її компактністю та слабкокомпактністю. Всюди щільні множини в  $E_{\infty}$ . Сепарабельні простори. Повні простори.

*Тема 33.* Визначення неперервного лінійного функціоналу у точці та на  $E_{\infty}$ . Обмеженість лінійного функціоналу та її зв'язок з неперервністю. Простір  $l^2$  нескінчених послідовностей, які сходяться з квадратом. Простір  $L^2_E$  дійснoвизначених функцій, які є інтегрованими з квадратом на  $E_{\infty}$ . Ізоморфізм  $l^2$  та  $L^2_E$ . Визначення гільбертового простору. Приклади гільбертових просторів.

## **3. Структура навчальної дисципліни**

Назви тем	Кількість годин		
	Лекційні заняття	Практичні заняття	Самостійна робота
<b><u>Розділ 1. Лінійні простори.</u></b>			
1. Визначення лінійного простору.	2	2	3
2. Системи векторів.	2	2	3
3. Підпростір та лінійний многовид	2	2	3
Разом за розділом 1	6	6	9
<b><u>Розділ 2. Алгебра матриць.</u></b>			

4. Алгебра матриць.	2	2	3
Разом за розділом 2	2	2	3
<b>Розділ 3. Евклідові та унітарні простори.</b>			
5. Евклідові простори.	2	2	3
6. Унітарні простори.	2	2	3
Разом за розділом 3	4	4	6
<b>Розділ 4. Метричні та нормовані простори.</b>			
7. Визначення метричних та нормованих просторів.	1	1	3
Разом за розділом 4	1	1	3
<b>Розділ 5. Теорія визначників.</b>			
8. Полі лінійні функціонали.	1	1	3
9. Методи обчислення визначників.	2	2	3
Разом за розділом 5	3	3	6
<b>Розділ 6. Системи лінійних рівнянь.</b>			
10. Обернена матриця.	2	2	3
11. Однорідні системи лінійних рівнянь.	2	2	3
12. Неоднорідні системи лінійних рівнянь.	2	2	3
Разом за розділом 6	6	6	9
<b>Розділ 7. Білінійні та квадратичні форми.</b>			
13. Білінійні та квадратичні форми.	2	2	3
Разом за розділом 7	2	2	3
<b>Розділ 8. Лінійні оператори.</b>			
14. Визначення лінійного оператора.	2	2	3
15. Ядро та образ лінійного оператора.	2	2	3
16. Власні вектори та власні значення лінійного оператора.	2	2	3
Разом за розділом 8	6	6	9
<b>Розділ 9. Перетворення при зміні базису.</b>			
17. Матриця переходу.	2	2	3
Разом за розділом 9	2	2	3
<b>Розділ 10. Лінійні оператори у евклідових та унітарних просторах.</b>			
18. Спеціальне представлення лінійних та півторалінійних форм.	2	1	3
19. Спряжені оператори. Норма лінійного оператора.	2	1	3
20. Ермітовий оператор. Спектральне розкладання ермітового оператора.	2	1	3
21. Унітарні та нормальні оператори.	2	1	3
22. Нормальна жорданова форма лінійного оператора.	2	1	3
23. Ортогональні оператори.	2	1	3
Разом за розділом 10	12	6	18
<b>Розділ 11. Елементи теорії груп.</b>			
24. Визначення групи.	2	1	3



25. Суміжні класи.	2	1	3
26. Перетворення Лоренца.	2	1	3
27. Лінійне представлення груп.	2	1	3
Разом за розділом 11	8	4	12
<b>Розділ 12. Елементи теорії тензорів.</b>			
28. Коваріантні та контраваріантні координати векторів.	2	1	3
29. Основні операції над тензорами.	2	1	3
30. Алгебраїчний символ Леві-Чівіта.	2	1	3
31. Операції над тензорним полем.	2	1	3
Разом за розділом 12	8	4	12
<b>Розділ 13. Елементи теорії гільбертових просторів.</b>			
32. Фундаментальні послідовності та компактні множини.	2	1	3
33. Простори $l^2$ та $L^2_E$ .	2	1	2
Разом за розділом 13	4	2	5
<b>Усього годин</b>	<b>64</b>	<b>48</b>	<b>98</b>

#### 4. Теми практичних занять

Література:

Анг: Ангелейко В.В., Кірочкін Ю.А., Ходусов В.Д. “Методичні вказівки з вивчення розділу “Елементи тензорного числення” курсу “Вища алгебра””, Харків, 1988.  
Бел1: Беляєв М. Р., Беляєва Т.М, Ходусов В.Д. «Лінійні (векторні) простори. Алгебра матриць», методичні вказівки з вивчення курсу «Вища алгебра», Харків, 2002.  
Бел2: Беляєв М. Р., Беляєва Т.М, Ходусов В.Д. «Евклідові та унітарні простори», методичні вказівки з вивчення курсу «Вища алгебра», Харків, 2002.  
Бел3: Беляєв М. Р., Беляєва Т.М, Ходусов В.Д. «Визначники. Системи лінійних рівнянь», методичні вказівки з вивчення курсу «Вища алгебра», Харків, 2002.  
Бел4: Беляєв М. Р., Беляєва Т.М, Ходусов В.Д. «Лінійні та білінійні форми. Лінійні оператори. Перетворення при зміні базису», методичні вказівки з вивчення курсу «Вища алгебра», Харків, 2003.

**Тема 1.** Лінійні простори – 2 години.

Питання:

- аксіоми лінійного простору;
- лінійний простір поліномів ступеня не вище  $n$ ;
- лінійний простір диференційованих функцій;
- лінійний простір квадратних матриць.

Бел1: №1,3,5,7,9,11,13,15,33(а,в,д).

**Тема 2.** Системи векторів – 2 години.

Питання:

- лінійна комбінація векторів;
- лінійна оболонка векторів;
- лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів;
- повні системи векторів;
- ізоморфізм лінійних просторів.

Бел1: №34(а,в,д),35(а,в),40(а,в),45(а,в),47(а),50(а),53(а).

**Тема 3.** Лінійні підпростори, їх розмірність та базис – 2 години.

Питання:

- базис лінійного простору;
- розмірність лінійного простору;
- координати вектора у заданому базисі;
- сума та перетин лінійних підпросторів;
- формула Грассмана;
- лінійне різноманіття.

Бел1: №36(а,в),38(а,в),54(а),56,67(а),68(а).

**Тема 4.** Алгебра матриць – 2 години.

Питання:

- визначення матриці;
- симетричні та кососиметричні матриці;
- операції над матрицями: множення на скаляр, сума матриць, добуток матриць, транспонування матриць, комплексне спряження матриць, операція ермітового спряження.

Бел1: №17(а,в),18(а),19(а),20(а),22(а,в),23(а,в),28(а,в),30,32(а).

**Тема 5.** Скалярний добуток. - 2 години.

Питання:

- аксіоми скалярного добутку;
- матриця Грамма;
- довжина вектора;
- кут між векторами.

Бел2: №2(а,в),4(а,в),9(а,в),10(а,в),13(а),15(а).

**Тема 6.** Ортонормовані системи векторів. – 2 години.

Питання:

- ортонормовані системи векторів;
- метод ортогоналізації Штурма;
- доповнення до ортонормованого базису.

Бел2: №17(а,г),19(а,з),20(а),24(а),27(а),31(а).

**Тема 7.** Ортогональне доповнення до напівпростору. – 2 години.

Питання:

- ортогональна проекція вектора на підпростір;
- ортогональна складова вектора до підпростору.

Бел2: №36(а),38(а),40(а,в),41(а),43(а,в)45(а).

**Тема 8.** Обернена матриця. – 2 години.

Питання:

- полілінійний функціонал;
- кількість безпорядків у перестановці;
- правило трикутників для обчислення визначників 3-го порядку;
- властивості визначників;
- мінор;
- алгебраїчне доповнення.

Бек: №31.8(1,3),32.1(1,3).

Бел3: №1(а,в),2(а,в),3(а),4(а),5,7,8(а,в),9,10(а).

**Тема 9.** Методи обчислення визначників. – 2 години.

Питання:

- Розкриття визначника за елементами вибраного рядка або стовпчика;
- Методи обчислення визначників: метод приведення до трикутного вигляду, метод виділення лінійних множників, метод представлення визначника у вигляді суми двох визначників, метод рекурентних співвідношень, метод змінювання елементів визначника.

Бел3: №11,13(а),16(а),20(а),22(а),23(а),25(а),26(а),27(а),30(а).

**Тема 10.** Ранг матриці – 2 години.

Питання:

- базисний мінор;
- ранг матриці;
- обернена матриця;
- матричні рівняння.

Бел3: №1(а),3(а),4(а),5(а,г),6(а,в),9(а,в),10(а).

**Тема 11.** Системи лінійних однорідних рівнянь – 2 години.

Питання:

- сумісні та визначені системи лінійних рівнянь;
- загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь;
- базис та розмірність простору розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь;
- правило Крамера.

Бел3: № 12(а),13(а,в),14(а,в),17(а,в).

**Тема 12.** Системи лінійних неоднорідних рівнянь – 2 години.

Питання:

- Метод Гаусса;
- Частинний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь;
- Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь.

Бел3: №19(а,в),20(а,в),23(а,в),27(а,в).

**Тема 13.** Білінійні та квадратичні форми – 2 години.

Питання:

- аксіоми білінійної форми;
- матриця білінійної форми;
- симетрична та антисиметрична білінійні форми;
- класифікація квадратичних форм;
- критерій Сильвестра.

Бел4: №2(а),4(а),6(а),7(а,ж).

**Тема 14.** Канонічний вигляд квадратичної форми – 2 години.

Питання:

- канонічний вигляд та канонічний базис квадратичної форми;
- метод Якобі приведення квадратичної форми до канонічного вигляду;

- метод Лагранжа приведення квадратичної форми до канонічного вигляду;
- закон інерції квадратичних форм.

Бел4: №10(а,в),11(а,в),12(а,в),13(а,в),14(а,в).

**Тема 15.** Лінійний оператор – 2 години.

Питання:

- аксіоми лінійного оператора;
- операції над лінійними операторами;
- матриця лінійного оператора;
- ядро лінійного оператора;
- образ лінійного оператора.

Бел4: №1(в),6(в),9(в),10,13(в),15(а),19(а),21(а),23(а),26(в),27(а).

**Тема 16.** Власні вектори та власні значення лінійного оператора – 2 години.

Питання:

- інваріантні підпростори;
- власні вектори та власні значення лінійного оператора;
- характеристичне рівняння.

Бел4: №37(а,г,ж,к),39(1),40(1),41(б).

**Тема 17.** Перетворення при зміні базису – 2 години.

Питання:

- матриця переходу (перетворення базисних векторів);
- перетворення координат векторів;
- перетворення матриці лінійного оператора;
- перетворення коефіцієнтів лінійної форми;
- перетворення матриці білінійної форми;
- виконання двох послідовних перетворень.

Бел4: №1,5,9,18,20,24.

**Тема 18.** Ермітові, унітарні та нормальні оператори – 2 години.

Питання:

- матриця спряженого оператора;
- ермітові оператори;
- унітарні оператори;
- нормальні оператори.

Бек: №28.22(3),23(3),25(1),26(1);

Бек: №29.5(1),7(4),10(2),11(1),24(11);

Бек: №30.7(3),8(1).

**Тема 19.** Корінь m-го степеня з матриці – 2 години.

Питання:

- матриці лінійних операторів;
- власний базис лінійного оператора;
- матриця переходу до власного базису лінійного оператора;
- прямий та обернений переходи.

$$\begin{pmatrix} 0,15 & -0,09 \\ -0,25 & 0,15 \end{pmatrix}^{1/2}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{100}, \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{1/2}.$$

**Тема 20.** Одночасне приведення пари квадратичних форм до канонічного вигляду – 2 години.

Питання:

- теорема про одночасне приведення пари квадратичних форм до канонічного вигляду;
- визначення скалярного добутку у лінійному просторі;
- характеристичне рівняння у неортонормованому базисі.

Бек: №32.36(1,4,11).

**Тема 21.** Нормальна жорданова форма матриці лінійного оператора – 2 години.

Питання:

- відсутність власного базису лінійного оператора;
- жорданова клітина;
- жорданова матриця;
- ядро та образ допоміжного лінійного оператора;
- доповнення власних векторів лінійного оператора до базису їх прообразами.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Тема 22.** Групи – 2 години.

Питання:

- аксіоми визначення групи;
- група перестановок;
- циклічна група;
- суміжні класи та нормальний дільник;
- фактор- група.

Бек: №13.1(1),3(1,3,4,6,9,10),4(1,6,7,8),9(1),11(1),24(1),28(1).

**Тема 23.** Взаємні базиси. Коваріантні та контраваріантні координати векторів – 2 години.

Питання:

- лінійні ортогональні перетворення координат;
- коваріантні та контраваріантні координати векторів;
- тензори довільного рангу;
- рівність тензорів;
- сума тензорів;
- добуток тензорів;
- звертання тензорів;
- скалярний добуток тензорів;
- ознака тензорності величини;
- симетрія та антисиметрія тензорів;
- псевдотензори.

Анг: №1,3,5,6(a),7.

**Тема 24.** Символ Кронекера. Символ Леві- Чивіта – 2 години.

Питання:

- символ Кронекера;

- символ Леви- Чивіта;
- зв'язок тензорів 2-го рангу з визначниками;
- обернений тензор;
- розв'язок системи лінійних рівнянь;
- приведення тензора 2-го рангу до головних осей;
- інваріанти тензора.

Анг: №8(а),9,10(а).

**Тема 25.** Тензорні поля. Операції над тензорними полями – 2 години.

Питання:

- тензорні поля;
- диференціювання тензорного поля;
- основні диференційні операції 1-го порядку;
- деякі диференційні операції 2-го порядку;
- деякі інтегральні формули тензорного аналізу.

Анг: №11(а,в),12(а,в),13(а,в),14.

## 5. Завдання для самостійної роботи

Тема 1. Бел1: №2,4,6,8,10,12,14,16,33(б,г,е).

Тема 2. Бел1: №34(б,г,е),35(б,г),40(б,г),45(б,г),47(б),50(б),53(б,в).

Тема 3. Бел1: №36(б,г),38(б,г),54(б,в),57,67(б),68(б,г).

Тема 4. Бел1: №17(г,д),18(б,в),21(г,д),22(б,г),23(г),25,28(б,г),31(б,в),32(б).

Тема 5. Бел2: №2(б,г),4(б,г),9(б,г),10(б,г),14(а,б),15(б,в).

Тема 6. Бел2: №17(б,д),19(б,и),20(б,в),24(б,г),27(б),31(в).

Тема 7. Бел2: №36(б),38(б),40(б,г),41(б),43(б,г)45(б).

Тема 8. Бек: №31.8(2,4),32.1(2,4);

Бел3: №1(б,г),2(б,г),3(б,в),4(б),6,8(б,г),9,10.

Тема 9. Бел3: №12,13(б,г),16(б,г),20(б,г),22(б,г),23(б,г),25(б,в),26(б),27(б),30(б,г).

Тема 10. Бел3: №2(б,г),3(б,г),4(б,г),5(б,д),6(б,г),9(б,г).

Тема 11. Бел3: №12(б,г),13(б,г),14(б,г),17(б,г).

Тема 12. Бел3: №18(б,г),20(б,г),23(б,г),27(б,г).

Тема 13. Бел4: №2(б),4(б,г),6(б,г),7(б,з).

Тема 14. Бел4: №10(б,г),11(б,г),12(б,г),13(б,г),14(б,г).

Тема 15. Бел4: №1(б,г),6(б,г),9(г),11,13(б,г),15(б,г),19(б),21(б),23(б),26(б,г),27(б,г).

Тема 16. Бел4: №37(б,д,ж),39(2),40(2),41(а,в).

Тема 17. Бел4: №2,4(а),5(б),6,10,12,19(а),20(б),23(а),26(а).

Тема 18. Бек: №28.22(4),23(4),24(6),25(2),26(2);

Бек: №29.4(3,8),5(4,5,6),7(8),10(1),11(2),24(16);

Бек: №30.7(6),8(2).

Тема 19.  $\begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix}^{1/2}$ ,  $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}^{50}$ ,  $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{1/2}$ .

Тема 20. Бек: №32.36(2,6,9).

Тема 21.  $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Тема 22. Бек: №13.1(2,3),3(2,4,5,7,8,11,12),4(2,3,4,5,9,10,11,12),9(2,3),11(3),24(2),28(2,3).

Тема 23. Анг: №2,4,6(б,в).

Тема 24. Анг: №8(б,в),10(б,в).

## 6. Індивідуальні завдання

В кожному семестрі передбачено по одній розрахунково-графічній роботі, які містять по 20 завдань зі збірника [7]. Кожний студент отримує свій варіант індивідуального завдання.

## 7. Методи навчання

При викладанні вищої алгебри використовують словесні, наочні, практичні та дискусійні методи навчання. На лекціях використовують найчастіше словесний, наочний та дискусійний методи. На практичних заняттях найчастіше використовують практичний та дискусійний методи. Під час самостійної роботи знаходять застосування всі згадані методи навчання.

## 8. Методи контролю

Навчальним планом передбачені наступні методи контролю:

- Поточний контроль передбачає по одній контрольній роботі у кожному семестрі.
- Підсумковий семестровий контроль – це іспит у комбінованій формі.

## 9. Схема нарахування балів

Лекційні заняття	10
Практичні заняття	20
Контрольна робота	20
Індивідуальне завдання	10
Іспит	40
<b>Сума</b>	<b>100</b>

## Критерії оцінювання навчальних досягнень

**Критерії оцінювання контрольної роботи.** Контрольна робота у 2 семестрі містить одне теоретичне питання та дві задачі. Контрольна робота у 3 семестрі містить два теоретичних питання та дві задачі. Контрольні роботи виконуються в аудиторії.

### Критерії оцінювання теоретичних питань:

Повна розгорнута відповідь - 10 балів.

Повна, але не розгорнута відповідь - 9 балів.

Повна, але не розгорнута відповідь, яка містить незначну помилку чи суперечність, - 8 балів, за кожну наступну незначну помилку чи суперечність знімається 1 бал.

Неповна відповідь, яка не містить критичних помилок чи суперечностей, - 7 балів, за кожну наступну незначну помилку чи суперечність знімається 1 бал.

Відповідь, що містить критичну помилку чи неточність, або відсутність відповіді оцінюється в 0 балів.

### Критерії оцінювання розв'язання задачі:

Студент отримав загальний розв'язок і правильно вирахував числове значення відповіді - 20 балів.

Студент отримав загальний розв'язок і неправильно вирахував числове значення відповіді - 17 балів.

Студент отримав загальний розв'язок, але помилився в одиницях вимірювання - 13 балів.

Студент правильно виписав необхідні для розв'язання закони та рівняння, але не зміг отримати загальний розв'язок - 8 балів.

Студент не повністю виписав необхідні для розв'язання закони та рівняння - 2 бали.

Студент не правильно виписав необхідні для розв'язку закони та рівняння, чи розв'язок взагалі відсутній 0 балів.

**Критерії оцінювання підсумкового контролю знань.** Підсумковий контроль знань відбуваються у вигляді письмового екзамену з навчальної дисципліни. Кожен білет має два теоретичних питання та задачу що потребує розв'язання:

Перше питання до 10 балів.

Друге питання до 10 балів.

Розв'язання задачі до 20 балів.

**Критерії оцінювання теоретичних питань:**

Повна розгорнута відповідь - 10 балів.

Повна, але не розгорнута відповідь - 9 балів.

Повна, але не розгорнута відповідь, яка містить незначну помилку чи суперечність, - 8 балів, за кожну наступну незначну помилку чи суперечність знімається 1 бал.

Неповна відповідь, яка не містить критичних помилок чи суперечностей, - 7 балів, за кожну наступну незначну помилку чи суперечність знімається 1 бал.

Відповідь, що містить критичну помилку чи неточність, або відсутність відповіді оцінюється в 0 балів.

**Критерії оцінювання розв'язання задачі:**

Студент отримав загальний розв'язок і правильно вирахував числове значення відповіді - 20 балів.

Студент отримав загальний розв'язок і неправильно вирахував числове значення відповіді - 17 балів.

Студент отримав загальний розв'язок, але помилився в одиницях вимірювання - 13 балів.

Студент правильно виписав необхідні для розв'язання закони та рівняння, але не зміг отримати загальний розв'язок - 8 балів.

Студент не повністю виписав необхідні для розв'язання закони та рівняння - 2 бали.

Студент не правильно виписав необхідні для розв'язку закони та рівняння, чи розв'язок взагалі відсутній 0 балів.

Для допуску до складання підсумкового контролю (екзамену) здобувач вищої освіти повинен набрати не менше 15 балів з навчальної дисципліни під час поточного контролю, самостійної роботи, індивідуального завдання.

#### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для екзамену	для заліку
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано



## 10. Рекомендована література

### Основна література:

1. Ангелейко В.В., Кірючкін Ю.А., Ходусов В.Д. “Методичні вказівки з вивчення розділу “Елементи тензорного числення” курсу “Вища алгебра””, Харків, 1988.
2. Беляєв М. Р., Беляєва Т.М, Ходусов В.Д. «Лінійні (векторні) простори. Алгебра матриць», методичні вказівки з вивчення курсу «Вища алгебра», Харків, 2002.
3. Беляєв М. Р., Беляєва Т.М, Ходусов В.Д. «Евклідові та унітарні простори», методичні вказівки з вивчення курсу «Вища алгебра», Харків, 2002.
4. Беляєв М. Р., Беляєва Т.М, Ходусов В.Д. «Визначники. Системи лінійних рівнянь», методичні вказівки з вивчення курсу «Вища алгебра», Харків, 2002.
5. Беляєв М. Р., Беляєва Т.М, Ходусов В.Д. «Лінійні та білінійні форми. Лінійні оператори. Перетворення при зміні базису», методичні вказівки з вивчення курсу «Вища алгебра», Харків, 2003.
6. Беляєв М.Р., Беляєва Т.М., Павленко І.В., Ходусов В.Д. Вища алгебра для фізиків та інженерів. – Х.: ХНУ імені В.Н.Каразіна, 2008.
7. Лінійна алгебра. Збірка завдань та методика розв’язання. Навчально-методичний посібник. – Х.: НТУ ХПІ, 2013.

### Допоміжна література:

1. Introduction to Linear Algebra (Gilbert Strang) 5th Edition by Gilbert Strang Wellesley-Cambridge Press; (2016)

## 11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

Студентам надається доступ до курсу “Вища алгебра” в Google Classroom, де знаходяться електронний конспект лекцій, електронні підручники та задачки, список екзаменаційних теоретичних питань, список задач для роботи на практичних заняттях та для самостійної роботи, список допоміжних коротких питань за курсом, розклад консультацій за курсом.