РЕШЕНИЯ 10 КЛАСС

Задача 1.

На длинном горизонтальном участке полигона испытываются ракетные и авиационные реактивные двигатели. Однажды тележка с ракетным двигателем, стартуя с места, двигалась с постоянным ускорением, пока не выгорело все горючее, а потом она продолжала двигаться с постоянной скоростью. Горючее, как оказалось, кончилось ровно посередине участка полигона. Затем из той же начальной точки начала разгоняться тележка с авиационным реактивным двигателем, которая прошла с постоянным ускорением всё расстояние. Оказалось, что обе тележки прошли это расстояние за одинаковое время. Чему равно отношение ускорений, развиваемых ракетным и авиационным двигателями?

Обозначим ускорение тележки с ракетным двигателем через a_1, а с авиационным — через a_2. Пусть $2S$ — проходимый тележками путь. Тележка с ракетным двигателем первую половину пути проходит за время t_1, определяемое из уравнения

$$S=\frac{1}{2}a_1t_1^2, \quad \text{т. е.} \quad t_1=\sqrt{\frac{2S}{a_1}}.$$

Вторую половину пути она проходит за время t_2,

$$S=v_0t_2,$$

где v_0 — скорость тележки в конце первой половины пути, т. е. $v_0=a_1t_1$, откуда

$$S=a_1t_1t_2 \quad \text{и} \quad t_2=\frac{S}{a_1t_1}=\sqrt{\frac{S}{2a_1}}.$$

Тележка с реактивным двигателем проходит все расстояние за время t, такое, что

$$2S=\frac{1}{2}a_2t^2, \quad \text{т. е.} \quad t=\sqrt{\frac{4S}{2a_2}}.$$

По условию задачи $t=t_1+t_2$, так что

$$\sqrt{2\frac{S}{a_1}}+\sqrt{\frac{S}{2a_1}}=\sqrt{\frac{4S}{a_2}}.$$

Отсюда находим

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{9}{8}.$$

Задача 2.

Спутник Земли массой 10 кг со средним поперечным сечением 0,50 м^2 движется по круговой орбите на высоте 200 км, где средний пробег молекул измеряется многими метрами и плотность воздуха равна 1.6×10^{-10} кг/м^3. Приближенно будем считать соударения молекул со спутником абсолютно неупругими (молекулы не прилипают к спутнику, но отскакивают от него с очень малыми относительными скоростями). Подсчитайте, какая тормозящая сила будет действовать на спутник за счет трения о воздух. Как будет зависеть эта сила от скорости спутника?

Двигаясь по орбите, спутник в единицу времени сталкивается с молекулами воздуха, занимающими объем vS (v — скорость спутника, S — площадь его поперечного сечения). Масса этого объема воздуха $m_1=\rho Sv$, где ρ — плотность воздуха.

Изменение количества движения спутника за этот же промежуток времени $\Delta p=m(v-v')$ равно, очевидно, изменению количества движения массы m_1 воздуха, т. е.

$$\Delta p=m_1v=\rho Sv^2.$$

(До столкновения средняя скорость молекулы воздуха относительно Земли равна нулю, после столкновения — скорости спутника v.)

Но изменение количества движения тела в единицу времени есть просто сила, действующая на тело. Таким образом, тормозящая сила $F_{торм} = \rho S v^2$, т. е. пропорциональна квадрату скорости спутника. Найдем ее величину.

Для стационарной орбиты

$$\frac{mv^2}{R+h} = \frac{GmM}{(R+h)^2},$$

откуда

$$v^2 = \frac{GM}{R+h}$$

(M и R — масса и радиус Земли, G — постоянная тяготения).

Если тело находится на поверхности Земли, то, очевидно,

$$mg = \frac{GmM}{R^2} \text{ и } GM = gR^2.$$

Подставляя это значение GM в выражение для скорости спутника, получаем

$$v^2 = \frac{gR^2}{R+h} \approx gR\left(1 - \frac{h}{R}\right).$$

[Здесь мы воспользовались приближенной формулой: $1/(1+x) \approx 1 - x$ при $x \ll 1$.] Таким образом,

$$F_{торм} = \rho SgR\left(1 - \frac{h}{R}\right) \approx 0{,}5 \cdot 10^{-2} \textit{ ньютон}$$

($\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-10}$ *кг/м*^{3}, $S = 0{,}5$ *м*^{2}, $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}, $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ *м*, $h = 0{,}2 \cdot 10^6$ *м*).

Задача 3.

Вы находитесь на судне, которое идет на восток с постоянной скоростью 15 узлов. Корабль, идущий постоянным курсом с скоростью 26 узлов, находится в 6 милях южнее. Позднее он проходит у вас за кормой. Минимальное расстояние, на которое сближаются суда, составляет 3 мили.

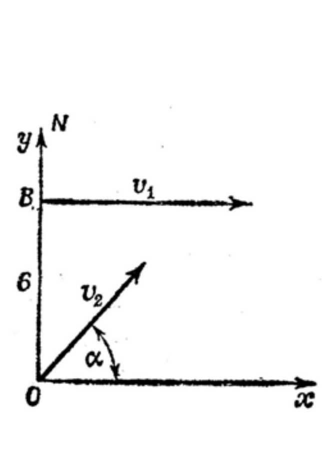
а) Найдите курс этого корабля.

б) Какое время прошло между двумя моментами, описанными в задаче?

а) Выберем систему координат так, чтобы ось x была направлена строго на восток, а ось y — на север. Предположим далее, что второй корабль в начальный момент времени находится в начале координат O, а вектор его скорости $\mathbf{v}_2$ образует угол α с осью OX. Очевидно, первый корабль находится в точке B, лежащей на оси y на расстоянии 6 миль от O, а его скорость направлена параллельно оси x.

Таким образом, изменение координат кораблей со временем дается выражениями

$$x_1 = v_1 t, \qquad y_1 = 6,$$
$$x_2 = v_2 t \cos\alpha, \qquad y_2 = v_2 t \sin\alpha.$$



Квадрат расстояния между двумя кораблями, очевидно, равен

$$r^2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 = (15 - 26\cos\alpha)^2 t^2 + (6 - 26t\sin\alpha)^2.$$

В условии задачи дано, что минимальное расстояние между кораблями равно 3 милям. Значит, r^2 как функция времени t имеет минимум при некотором значении времени $t=t_{мин}$. Но в этот момент времени производная от r^2 обращается в нуль:

$$\frac{dr^2(t_{мин})}{dt}=0,$$

поэтому

$$2(15-26\cos\alpha)^2 t_{мин}-2(6-26t_{мин}\sin\alpha)\,26\sin\alpha=0,$$

откуда

$$t_{мин}=\frac{6\cdot 26\sin\alpha}{15^2-30\cdot 26\cos\alpha+26^2}.$$

Наконец, из того, что $r^2(t_{мин})=9$, находим

$$6^2\cdot 26\cos^2\alpha-27\cdot 30\cos\alpha=0,$$

откуда $\cos\alpha_1=0$ $(\alpha_1=90°)$ и $\cos\alpha_2=0{,}866$ $(\alpha_2=30°)$.

б) При меньшем значении угла $\alpha_2=30°$ второй корабль проходит перед носом первого на расстоянии 3 миль, поэтому это значение угла должно быть исключено по условию задачи. Таким образом, второй корабль движется курсом строго на север и окажется на минимальном расстоянии от первого через $t_{мин}=0{,}17$ *час* от начального момента.

Задача 4

Куб массы М прислонен к стене в наклонном положении, как показано на Рис.1. Между кубом и стеной трение отсутствует, но между кубом и полом оно есть, и величины коэффициента трения μ как раз еле хватает на то, чтобы куб не начал скользить. Найдите это минимальное значение коэффициента трения как функцию угла θ и рассчитайте значение θ, при котором μ=1.

Пусть угол θ и коэффициент трения μ таковы, что куб, предоставленный сам себе, начинает скользить. При этом изменение его потенциальной энергии (за счет опускания ц. м.) окажется больше работы силы трения: за счет этой разницы и появляется кинетическая энергия у куба. Ясно, что в положении, когда силы трения едва хватает, чтобы удержать куб, изменение потенциальной энергии при (воображаемом) небольшом смещении куба будет как раз равно работе силы трения. Как видно из рисунка, высота ц. м. куба равна $h=(l/\sqrt{2})\cos(45°-\theta)$ (l — длина ребра куба), а расстояние от нижнего ребра до стенки $x=l\cos\theta$.

Если угол θ уменьшился на величину $\Delta\theta$, то уменьшение потенциальной энергии куба равно

$$mg\frac{l}{\sqrt{2}}\sin(45°-\theta)\Delta\theta,$$

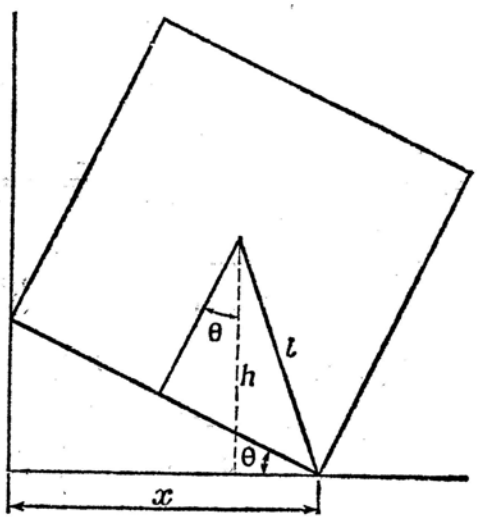
а работа силы трения равна $\mu Nl\sin\theta\Delta\theta$, где N — сила давления куба на пол. Если угол θ такой, что куб все-таки не движется, то $N=mg$ (сумма сил, действующих на куб, должна быть равна нулю). Итак,

$$mg\frac{l}{\sqrt{2}}\sin(45°-\theta)=\mu mgl\sin\theta,$$

или

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{1+2\mu}.$$

Проверим, насколько разумен наш ответ. Предположим, что угол θ очень мал. Ясно, что в этом случае нужно очень большое трение, чтобы удержать куб от скольжения. Это видно и из нашей формулы (при $\theta \to 0$ $\mu \to \infty$). Если $\theta = 45°$, куб балансирует на нижнем ребре и нужна очень маленькая сила со стороны стенки и соответственно очень маленькая сила трения, чтобы удержать его (при $\theta = 45°$ $\mu = 0$). Наконец, если $\mu = 1$, куб будет в равновесии при $\theta = 18°30'$.



Задача 5

На какой широте скорость точки земной поверхности за счет суточного вращения Земли на 200 м/с меньше, чем в Лос-Анджелесе? Широта Лос-Анджелеса – 34° северной широты.

За счет суточного вращения Земли каждая точка земной поверхности приобретает зависящую от широты φ скорость $v = \omega r = \omega R \cos\varphi$ (см. рисунок), где ω — угловая скорости вращения Земли.

В Лос-Анджелесе ($\varphi_0 = 34°$, см. географическую карту) $v = R\omega \cos\varphi_0$. Широту искомой точки земной поверхности найдем из уравнения

$$R\omega \cos \varphi_0 - R\omega \cos\varphi = 200,$$

откуда

$$\cos\varphi = 0{,}395; \quad \varphi = 66°40'.$$