Задача 1. Нити и блоки

Для решения достаточно знать закон сохранения энергии, и качественно понимать за счет чего устанавливается скорость.

Короткий вариант решения. Выигрыш в энергии происходит за счет того, что те участки нити, что вначале были горизонтальными, становятся (почти) вертикальными. Это соответствует тому, что центральный груз опускается на высоту l. То есть изменение потенциальной энергии системы $2mgl$. Эта энергия идет на разгон всех трех грузов до одинаковой скорости v, так что

$$2mgl = \frac{(m+m+2m)v^2}{2},$$

откуда имеем $v^2 = gl$ и ответ: $v = \sqrt{gl}$.

Подробный вариант решения. Пусть высота грузов в начальный момент над каким-либо уровнем, который можно назвать полом, равна соответственно h_1, h_2 и h_3 справа налево, так что центральному соответствует индекс 2. И пусть эти высоты через достаточно большой промежуток времени равны h_1', h_2' и h_3'. То, что промежуток времени достаточно большой, означает, что нити, привязанные к центральному грузу, становятся почти вертикальными. Тогда, если H это высота блоков над тем же уровнем, то условие нерастяжимости нитей записывается как

$$(H-h_1)+(H-h_2)+l = (H-h_1')+(H-h_2'); \quad (H-h_3)+(H-h_2)+l = (H-h_3')+(H-h_2'),$$

и значит

$$h_1+h_2 = h_1'+h_2'+l; \quad h_3+h_2 = h_3'+h_2'+l.$$

Изменение потенциальной энергии системы тогда равно

$$\begin{aligned}\Delta E =& (mgh_1'+2mgh_2'+mgh_3') - (mgh_1+2mgh_2+mgh_3) = \\ =& mg\left[(h_1'+h_2')+(h_2'+h_3')-(h_1+h_2)+(h_2+h_3)\right] = \\ =& \left\{\begin{array}{l}\text{используем условия}\\ \text{нерастяжимости нитей}\end{array}\right\} = mg(-l-l) = -2mgl.\end{aligned}$$

Эта энергия идет на разгон всех трех грузов до скорости v, которую надо найти. Кинетическая энергия грузов равна

$$K = \frac{mv^2}{2}+\frac{(2m)v^2}{2}+\frac{mv^2}{2} = 2mv^2.$$

Тогда из $\Delta E + K = 0$ получаем ответ:

$$v = \sqrt{gl}$$

Задача 4. Проволочная шапка

Задача состоит из двух частей, которые оценивается в **3** и **2** балла соответственно.
Для решения достаточно знать закон Ома и закон Джоуля-Ленца.

I. Кусочек проволоки между двумя ближайшими узлами на основании представляет восьмую часть окружности радиуса a, и его сопротивление поэтому равно $\frac{1}{8}\cdot 2\pi a\rho$. Обозначим его через

$$R = \frac{\pi}{4}a\rho.$$

Тогда сопротивление радиального кусочка проволоки (это те что расходятся из центрального узла и длина которых есть четверть длины окружности радиуса a) равно $\frac{1}{4}2\pi a\rho = 2R$.

Обозначим диаметрально противоположные узлы, сопротивление между которыми мы ищем, через A и B, центральный узел через O, два ближайших к A узла на окружности в основании через C_1 и C_2, и диаметрально противоположные им узлы, ближайшие к B, через E_1 и E_2. Оставшиеся два узла в основании, равноудаленные от A и B, обозначим через D_1 и D_2.

Электрическая цепь между A и B обладает высокой степенью симметрии, благодаря чему сильно упрощается соединением узлов с равным потенциалом. Так, во-первых, из симметрии видно, что

$$\varphi_O = \varphi_{D_1} = \varphi_{D_2} = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}.$$

Соединяя эти три узла и выбрасывая сопротивления OD_1 и OD_2, через которые не течет ток, получаем, что цепь разбивается на две последовательно соединенные одинаковые цепи AO и OB. В первой из них соединяем узлы C_1 и C_2, обладающие равным потенциалом, и таким образом сводим ее к набору последовательно и параллельно соединенных сопротивлений.

Вообще говоря, для того, чтобы понять, что можно соединять симметричные узлы и выбрасывать сопротивления OD_1 и OD_2, не обязательно знать и использовать понятие потенциала. Достаточно воспользоваться механической аналогией электрического тока, или провести рассуждение "в какую сторону потечет ток если соединить симметричные узлы?". Так как обе стороны цепи одинаковы, то ток не потечет никуда, а значит цепь просто не поменяется при соединении. Так же можно понять что ток не течет через $OD_{1,2}$.

Непосредственно считая сопротивление AO, получаем полное сопротивление цепи

$$R_f = 2R_{AO} = 2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2R}+\frac{1}{\frac{\frac{1}{2}}{R}+\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R}}}} = \frac{2R}{\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}} = \frac{2R}{\frac{1}{2}+\frac{6}{5}} = \frac{20}{17}R = \frac{20}{17}\frac{\pi}{4}a\rho = \frac{5\pi}{17}a\rho.$$

II. Мощность, выделяемая на участке электрической цепи, дается законом Джоуля-Ленца:

$$P = UI = I^2R$$

значит мощность, выделяемая на единицу длины, есть $I^2\rho$. Так как сопротивление на единицу длины ρ везде одно и то же, мощность, выделяемая на единицу длины, а значит и яркость свечения проволоки, больше там, где больше ток. Очевидно, достаточно рассмотреть цепь AO.

Ее можно представить как два сопротивления, включенные параллельно – одно $2R$, это радиальный кусок проволоки $A-O$, а второе это все остальные сопротивления между A и O, связанные узлом C (объединенные C_1 и C_2). Полное сопротивление этого куска $A-C-O$ есть в точности второе слагаемое знаменателя в выражении для R_f, в минус первой степени, и равно $\frac{5}{6}R$.

Если мы обозначим разность потенциалов между A и O через U, то ток через радиальное сопротивление будет равен $\frac{U}{2R} = \frac{1}{2}\frac{U}{R}$. Ток в цепи A–C–O равен $\frac{U}{\frac{5}{6}R} = \frac{6}{5}\frac{U}{R}$. Этот ток разделяется поровну между проволоками $A-C_1$ и $A-C_2$, значит на каждом из этих участков ток равен $\frac{3}{5}\frac{U}{R}$. Это больше чем ток через проволоку $A-O$.

Здесь удобнее разъединить соединенные ранее мысленно узлы C_1 и C_2 и рассмотреть кусочек цепи между узлами A, C_1 и D_1/O. Ток, текущий по $A-C_1$, дальше разбивается на две части, текущие по C_1-D_1 и C_1-O, поэтому больше каждой из этих частей.

Таким образом, видим что наибольший ток реализуется на участках $A-C_1$, $A-C_2$ и, конечно, симметричным им $B-E_1$ и $B-E_2$. На них светится ярче всего проволочка.

Задача 3. Центр масс

Первый вопрос оценивается в 1 балл, второй в 4.

I Понятно, что центр масс (ц.м.) правильного треугольника находится в его центре – центре вписанной и описанной окружностей, точке пересечения высот, медиан и биссектрис (здесь и далее везде подразумеваются однородные плоские тела). Это можно показать всевозможными способами, и не обязательно знать, что ц.м. произвольного треугольника лежит в точке пересечения медиан.
Варианты доказательства:

1. Самое короткое: понятно из соображений симметрии.

2. Подлиннее. Если подвесить треугольник за вершину, то линия подвеса будет проходить через высоту (она же медиана и биссектриса). Точка пересечения трех высот даст ц.м.

3. В точке пересечения медиан, потому что это верно для произвольного треугольника. А для произвольного треугольника доказать можно например так:
   Подвесим треугольник за одну из вершин, и предположим, что линия подвеса проходит через медиану. Мысленно разрежем треугольник на тоненькие полосочки, параллельные основанию, которое противоположно выбранной вершине. Каждая полосочка разбивается медианой на две равные части, значит ее центр масс находится на медиане и момент силы тяжести, действующей на нее, равен нулю. Поэтому и весь треугольник находится в равновесии, значит ц.м. лежит на медиане. Так как это верно для каждой из вершин, то ц.м. лежит в точке пересечения медиан. Заодно доказали, что все медианы пересекаются в одной точке.

II. Во-первых, опять из соображений симметрии, ц.м. нашей фигуры, трапеции, лежит на оси симметрии, и нужно лишь найти на каком расстоянии от большего из оснований. Обозначим высоту трапеции через $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, а искомое расстояние через x. Дальше, опять, есть много вариантов решения.

а) Разрежем трапецию на три составляющих ее правильных треугольника со стороной a и массы m. Ц.м. каждого находится на расстоянии $h/3$ от его основания (т.к. медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$).

Каждый из треугольников заменяем точечной массой m, расположенной в его центре масс (ведь это точка приложения силы тяжести), и мысленно сплющиваем в направлении, перпендикулярном оси симметрии (т.к. при этом не меняются рычаги сил тяжести относительно рассматриваемой оси вращения, это можно делать). Осталось найти ц.м. системы из двух точечных масс – одна $2m$ (получилась из двух треугольников) на расстоянии $h/3$ от бывшего основания, вторая m на расстоянии $2h/3$ от него же, так что расстояние между ними $h/3$.

Центр масс такой системы находится на расстоянии $\frac{1}{3}\cdot\frac{h}{3}$ от большей из масс, так как он должен быть к ней в два раза ближе чем к меньшей – тогда момент силы тяжести относительно ц.м. будет равен нулю. Тогда

$$x = \frac{h}{3} + \frac{h}{9} = \frac{4}{9}h.$$

Выражая через a, имеем $x = \frac{4}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{2}{3\sqrt{3}}a$

b) Можно разрезать трапецию на прямоугольник $a \times h$ и две половинки правильного треугольника. В остальном решение идет аналогично уже изложенному. Прямоугольник в два раза тяжелее треугольника (видно если сравнить площади), его ц.м. очевидно находится на расстоянии $h/2$ от большего основания трапеции, а ц.м. треугольника – на расстоянии $h/3$, и расстояние между центрами масс $h/6$. Аналогично предыдущему случаю тогда получаем

$$x = \frac{h}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{h}{6} = \frac{4}{9}h.$$

c) Более элегантный вариант – представить нашу трапецию как правильный треугольник со стороной $2a$, от которого отрезали верхушку, которая в свою очередь представляет собой правильный треугольник со стороной a. Большой треугольник имеет массу $4m$ и его ц.м. находится на расстоянии $2 \cdot \frac{h}{3} = \frac{2h}{3}$ от основания, отрезаемая часть имеет массу m и ее ц.м. находится на расстоянии $h + \frac{h}{3} = \frac{4h}{3}$ от того же основания. Расстояние между центрами масс двух фигур, таким образом, равно $\frac{2h}{3}$.

Фокус в том, чтобы теперь найти общий центр масс большого треугольника массы $4m$ и маленького массы $(-m)$. "Отрицательная масса" означает, что треугольник был отрезан, наложение таких двух фигур друг на друга и дает нам исходную трапецию. Это можно интерпретировать просто как то, что сила тяжести действует на этот треугольник не вниз, а вверх. Для компенсации моментов сил тяжести, действующих на два треугольника (заменяем их точечными массами), нужно чтобы ц.м. находился не между массами, а за большей из них. Расстояние от ц.м. до меньшей из масс – это рычаг силы тяжести, действующей на нее – в 4 раза больше чем расстояние до большей из масс, следовательно

$$x = \frac{2h}{3} - \frac{1}{3}\frac{2h}{3} = \frac{4}{9}h.$$

Получили тот же результат.

P.S. Понятно, что приведенными тремя вариантами не исчерпываются все способы разрезания трапеции, хотя вероятно другие способы менее эффективны. Полным решением считается любой из предложенных вариантов, или любое другое правильное решение.

Задача 5. Льдинка с дробинкой

Для того, чтобы льдинка с дробинкой начали тонуть, нужно растопить часть льда, такую чтобы сила Архимеда, действующая на полностью погруженную в воду льдинку с дробинкой, как раз компенсировала силу тяжести. Пусть это равновесие достигается когда масса льда в льдинке равна M'. Тогда условие записывается как

$$(m + M')g = \rho_0 g V,$$

где V это оставшийся объем льда и дробинки вместе $V = M'/\rho + m/\rho_d$. Тогда

$$m + M' = \rho_0\left(\frac{M'}{\rho} + \frac{m}{\rho_d}\right) \quad \Rightarrow \quad M' = m\frac{1-\rho_0/\rho_d}{\rho_0/\rho - 1} = m\frac{\rho}{\rho_d} \cdot \frac{\rho_d - \rho_0}{\rho_0 - \rho}.$$

Количество теплоты Q, необходимое для того, чтобы растопить "лишнюю" массу $(M - M')$ льда, равно $\lambda(M - M')$, так что в итоге получаем

$$Q = \lambda\left(M - m\frac{1-\rho_0/\rho_d}{\rho_0/\rho - 1}\right) = \lambda\left(M - m\frac{\rho}{\rho_d} \cdot \frac{\rho_d - \rho_0}{\rho_0 - \rho}\right).$$

Это ответ в двух формах, из которых каждый может выбрать ту, что больше нравится.

Кстати, это величина должна быть положительна. Это можно видеть из того, что отрицательное Q означало бы что $M < M'$, то есть масса (обьем) льда изначально недостаточна, чтобы удержать льдинку с дробинкой на плаву, и она должно была бы сразу затонуть. Обращение в ноль Q дает граничное соотношение между массами дробинки m и льда в льдинке M, при котором они еще не тонут.

Задача 2. Заряженная нить (повышенной сложности)

В задаче два вопроса. Каждый оценивается в 2.5 баллов – по половине стоимости задачи. Примечание: для нахождения максимума уметь дифференцировать НЕ обязательно (хотя и повредить умение, конечно, не может).

В СИ напряженность поля точечного заряда равна kq/r^2, а нити – $k\rho/r$, где $k = 1/4\pi\varepsilon_0$.

Часть 1. Во-первых, понятно, что равновесия не будет если заряды нити и грузика одного знака – тогда они отталкиваются, и грузик просто отвалится от стенки и упадет. Если же они противоположного знака, то они притягиваются и грузик прижимается к поверхности стенки. Раз это ясно, будем под q и ρ понимать абсолютные значения зарядов. Чтобы компенсировать силу тяжести, действующую на грузик, электростатическая сила должна действовать вверх, и грузик должен находиться ниже нити, и пусть высота нити относительно грузика равна h. Найти h в положении равновесия значит решить задачу.

Сила притяжения грузика к нити равна по величине $F = k\rho q/r$, где $r = \sqrt{l^2 + h^2}$. Тогда проекция силы, с которой нить действует на грузик, на вертикаль равна $F \cdot h/r = k\rho qh/r^2$. В равновесии эта сила должна уравновешиваться силой тяжести:

$$\frac{k\rho qh}{h^2 + l^2} = mg.$$

Переписав, получаем квадратное уравнение относительно h: $h^2 - \frac{k\rho q}{mg}h + l^2 = 0$. Введем обозначение

$$h_0 = \frac{k\rho q}{2mg}.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$h^2 - 2h_0h + l^2 = 0.$$

Его два решения

$$h_{1,2} = h_0 \pm \sqrt{h_0^2 - l^2}.$$

Это два положения равновесия, одно выше другое ниже.

Через исходные переменные

$$h_{1,2} = \frac{k\rho q}{2mg} \pm \sqrt{\left(\frac{k\rho q}{2mg}\right)^2 - l^2} = \frac{k\rho q \pm \sqrt{(k\rho q)^2 - (2mgl)^2}}{2mg}$$

Чтобы решения существовали, нужно чтоб дискриминант был положителен, т.е.

$$|h_0| \geq l \iff \frac{k\rho q}{l} > 2mg$$

Верхнее положение равновесия при этом устойчиво, а нижнее нет. Это можно видеть из того, что вертикальная компонента электростатической силы – удерживающая сила – пропорциональна $\frac{h}{h^2+l^2}$. Эта функция положительна, обращается в ноль при $h = 0$ и стремиться к нулю при больших h. Значит посередине где-то есть максимум, по бокам которого она спадает. Приравнивая эту силу mg, мы нашли две точки по разные стороны максимума. Если немножко сдвинуть груз из положения равновесия по направлению ко второму положению равновесия, удерживающая сила возрастает, в противоположном направлении – убывает. Результирующая при этом для верхней точки направлена по направлению к положению равновесия, а для нижней точки наоборот. Данное рассуждение, и вообще исследование на устойчивость – *не обязательны*, но если кто-то укажет, даже без объяснения, какое из положений устойчиво, а какое нет – следует добавить 1 балл (не превышая максимума 5 баллов за эту задачу).

Из приведенного рассуждения, вообще говоря, следует уже и решение части два.

Часть 2. Ускорение вверх максимально, когда максимума достигает равнодействующая сил, действующих на грузик. Так как сила тяжести не зависит от точки плоскости, то максимум реализуется в той точке плоскости, где максимальна вертикальная компонента напряженности поля нити.
a) Точки равновесия:

$$h_{1,2} = h_0 \pm \sqrt{h_0^2 - l^2} = \frac{k\rho q}{2mg} \pm \sqrt{\left(\frac{k\rho q}{2mg}\right)^2 - l^2}$$

Будем плавно увеличивать массу грузика m. Когда она станет достаточно большая, дискриминант обратится в ноль, два положения равновесия совпадут и при дальнейшем увеличении массы равновесия нигде не будет – силы притяжения между нитью и грузиком будет недостаточно чтоб удержать грузик в любой точке плоскости. В тот момент, когда два положения равновесия совпадают $h_m = h_1 = h_2$, удерживающая сила в положении равновесия максимальна – ее как раз хватает чтобы компенсировать силу тяжести. Значит именно в этой точке вертикальная компонента напряженности поля нити максимальна. А точка эта расположена на высоте $h_m = h_0 \pm 0 = h_0 = k\rho q/2Mg$ под нитью. Здесь M это та масса, которая зануляет дискриминант: $\frac{k\rho q}{2Mg} = l$, так что окончательно получаем

$$h_m = l.$$

Точно так же можно мысленно увеличивать g, или l, или уменьшать заряд q или плотность заряда нити ρ или константу k, это все одно и то же.

Следует обратить внимание, что есть два положения на стенке, на h_m ниже нити, и на h_m выше нити, где вертикальная компонента напряженности поля максимальна. При этом в верхней точке электростатическая сила и сила тяжести обе действуют вниз, так что полное ускорение максимально. В нижней точке достигается локальный экстремум (максимум или минимум в зависимости от соотношения зарядов и массы, но это исследование также необязательно, и за неразличение двух точек экстремумов баллы не снимаются)
b) Альтернативный способ – просто найти максимум из условия обращения в ноль производной

$$0 = \frac{d}{dh}\frac{h}{h^2 + l^2} = \frac{1}{h^2 + l^2} - \frac{2h^2}{(h^2 + l^2)^2} = \frac{l^2 - h^2}{(l^2 + h^2)^2}.$$

отсюда $h_m = l$.

Решение через углы. Все решение также можно сформулировать в терминах острого угла α между перпендикуляром, проведенным от нити к стенке и направлением от нити к грузику. Тогда условие равновесия записывается в виде $\sin 2\alpha = \frac{2mgl}{k\rho q}$, откуда получаем α. Здесь важно не проглядеть, что решения на самом деле два, α и $(45^\circ - \alpha)$ (устойчиво при этом второе, нижнее). Условия существования положений равновесия находятся из требования $\sin 2\alpha \le 1$.

Условие максимума вертикальной компоненты напряженности электростатического поля (и силы) записывается в виде $\sin 2\alpha = \max$, откуда $\alpha = \pm 45^\circ$. Это те же точки, что найдены были раньше.

В целом решение, использующее тригонометрию, более экономное, но требует внимательности и более чем знания определения синуса и косинуса. Решение же в терминах высоты h, хоть и требует знания понятия проекции, может быть записано без использования тригонометрии, так как величину проекции можно записать исходя из подобия соответствующих треугольников.