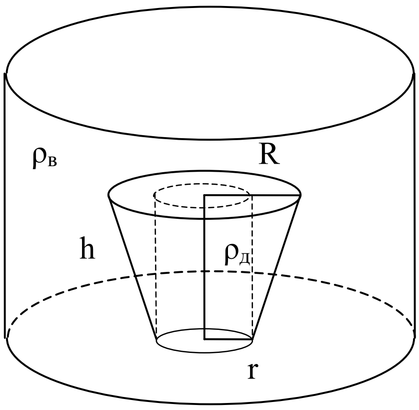
Варианты решения задач III тура Всеукраинской олимпиады по физике среди старшеклассников Харьковской области (2009 г.)

Решения задач для 11 класса

Задача 1. Деревянный конус

Деревянный усеченный конус, полностью погруженный под воду, стоит на дне сосуда на своем меньшем основании. При каких соотношениях между радиусами оснований конуса он не всплывает. Плотность воды и дерева заданы. Плотность дерева меньше плотности воды.



Архимедова сила не действует на внутреннюю часть конуса, которая представляет собой цилиндр, с основанием равным меньшему (нижнему) основанию конуса, и с высотой, равной высоте конуса. Значит, объем, на который действует сила Архимеда, равен

$$V = V_{конус} - V_{цилиндр} = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right) - \pi r^2 h =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr - 2r^2\right) = \frac{1}{3}\pi h(R-r)(R+2r).$$

Следовательно, сила Архимеда равна

$$F_A = \rho_{вода} g V = \rho_{вода} g \frac{\pi h}{3}(R-r)(R+2r).$$

Сила тяжести равна

$$F_T = \rho_{дер} g V_{конус} = \rho_{дер} g \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right).$$

Из равенства сил получаем

$$\rho_{дер}\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \rho_{вода}\left(R^2 + Rr - 2r^2\right).$$

Отсюда (пусть $\rho_{дер} / \rho_{вода} = a$) получаем:

$$R^2(1-a) + Rr(1-a) - r^2(2+a) = 0,$$

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{R}{r} - \frac{(2+a)}{1-a} = 0.$$

Значит

$$\left(\frac{R}{r} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{(2+a)}{1-a} = \frac{9-3a}{4(1-a)}$$

Варианты решения задач III тура Всеукраинской олимпиады по физике (2009 г.) среди старшеклассников Харьковской области.
Олимпиада состоялась 7 февраля 2009 года в Харьковском национальном университете на базе физико-технического факультета.
Адрес: ХНУ имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков, 61077. http://www-htuni.univer.kharkov.ua

и

$$\frac{R}{r}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9-3a}{4(1-a)}}.$$

Выберем положительный корень.

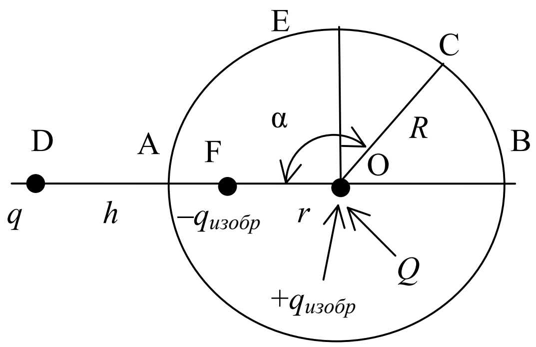
Ответ: $\frac{R}{r}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1-a/3}{1-a}}-\frac{1}{2}$.

Задача 2. Метод изображений

На расстоянии h от поверхности большого (радиусом R) положительно заряженного (заряд Q) незаземленного шара находится положительный точечный заряд q.

При каких условиях между ними возникает притяжение.

1. В сфере возникает изображение заряда. Найдем его местоположение и величину.



Изображение заряда находим из условия эквипотенциальности поверхности шара, так как он является проводником. Предположим, что заряд q создает изображения: $-q_{изобр}$ в точке F (на расстоянии r от центра) и $+q_{изобр}$ в центре, так чтобы не изменился полный заряд шара (он – заземлен).

Потенциал, создаваемый зарядами q и $-q_{изобр}$ в произвольной точке C не должен зависеть от местоположения точки C. В частности, потенциал в точках A, B и E одинаковы. То есть

$$\frac{q}{h}-\frac{q_{изобр}}{R-r}=\frac{q}{h+2R}-\frac{q_{изобр}}{2R-r}=\frac{q}{|DE|}-\frac{q_{изобр}}{|FE|}=0.$$

Этот потенциал равен нулю по следующим соображениям: если бы шар был заземлен, то изображение в точке F было бы таким же, а потенциал оказался бы равен нулю.

Результат: $r=\frac{R^2}{R+h}$ и $q_{изобр}=q\frac{R}{R+h}$.

Задача 3. Цилиндр с газом Высокий цилиндрический сосуд заполнен идеальным газом молярной массы M и размещен вертикально в однородном гравитационном поле с ускорением свободного падения g. Площадь основания сосуда S, высота H . Весь объем газа характеризуется постоянной температурой T. Давление газа на нижнее основание сосуда p_0. Найти массу газа в сосуде.

Известно, что зависимость давления от высоты дается барометрической формулой

$$P(h) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT} \right),$$

где M – молярная масса, g – ускорение свободного падения, H – высота, R – универсальная газовая постоянная.

Решение

Плотность:

$$n(h) = \frac{N}{V} = \frac{NP}{VP} = \frac{NP}{\nu RT} = \frac{NP}{\nu RT} = \frac{N_A P}{RT} = \frac{P}{k_B T} = \frac{1}{k_B T} P_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT} \right)$$

$$N_{полное} = S \int_0^H \frac{N_A}{RT} P_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT} \right) dh = \frac{N_A S}{RT} P_0 \frac{RT}{Mg} \left(1 - \exp\left[-\frac{MgH}{RT} \right] \right).$$

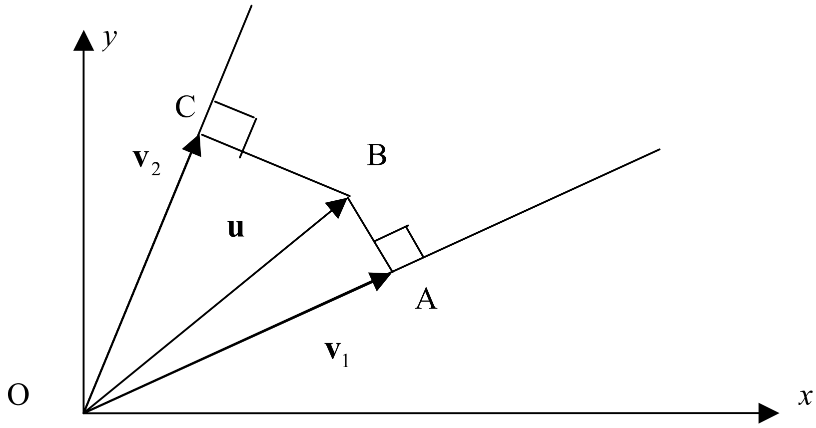
Ответ: $$mg = SP_0 \left(1 - \exp\left[-\frac{MgH}{RT} \right] \right)$$

Задача 4. Два катера и баржа

Два катера тянут баржу за нерастяжимые канаты. Найти скорость $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ баржи в тот момент, когда скорость катеров равна $\mathbf{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$ и $\mathbf{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})$.

Проекции искомой скорости на канаты совпадают со скоростями самих канатов, так как они не растяжимы.

Варианты решения задач III тура Всеукраинской олимпиады по физике (2009 г.) среди старшеклассников Харьковской области. Олимпиада состоялась 7 февраля 2009 года в Харьковском национальном университете на базе физико-технического факультета.
Адрес: ХНУ имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков, 61077. http://www-htuni.univer.kharkov.ua



$OA^2 = OB^2 - AB^2$, отсюда

$$v_{x1}^{\ 2} + v_{y_1}^{\ 2} = v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2} - \{(v_x - v_{x1})^2 + (v_y - v_{y_1})^2\} =>$$

$$v_{x1}^{\ 2} + v_{y_1}^{\ 2} = v_x v_{x1} + v_y v_{y_1}$$

В итоге получаем систему:

$$\begin{cases} v_x v_{x1} + v_y v_{y_1} = v_{x1}^{\ 2} + v_{y_1}^{\ 2} \\ v_x v_{x2} + v_y v_{y_2} = v_{x2}^{\ 2} + v_{y_2}^{\ 2} \end{cases}$$

Отсюда:

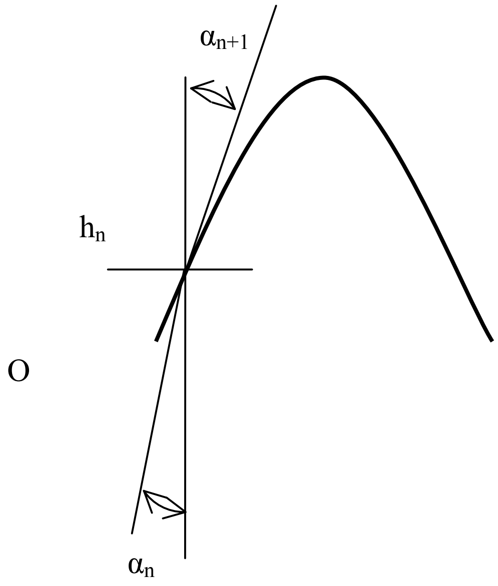
$$v_x = \frac{(v_{x1}^{\ 2} + v_{y_1}^{\ 2})v_{y_2} - (v_{x2}^{\ 2} + v_{y_2}^{\ 2})v_{y_1}}{v_{x1}v_{y_2} - v_{x2}v_{y_1}} \quad y = \frac{(v_{x2}^{\ 2} + v_{y_2}^{\ 2})v_{x1} - (v_{x1}^{\ 2} + v_{y_1}^{\ 2})v_{x2}}{v_{x1}v_{y_2} - v_{x2}v_{y_1}}$$

2. Доп.балл за предельный случай: $v_1 \uparrow\uparrow v_2$ и $v_1 \uparrow\downarrow v_2$, т.е когда знаменатель равен нулю.

Задача 5. Поворот луча света

Определить траекторию луча света излученного под заданным углом к горизонту в атмосфере, плотность которой с высотой меняется так, что скорость света в атмосфере дается функцией $c^2 = \dfrac{c_0^2}{1 - y / y_0}$.

Здесь



Обобщенный закон Снеллиуса:

$$c_0 \sin\alpha_0 = c \ \sin\alpha$$

В максимуме $c(y_{\max}) = c_0 \sin\alpha_0$

В текущей точке траектории наклон равен производной

$$tg\beta = ctg\alpha = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{c_0}{c}\sin\alpha_0\right)^2}{\left(\frac{c_0}{c}\sin\alpha_0\right)^2}} = \frac{\sqrt{c_0^2 - c^2\sin^2\alpha}}{c\sin\alpha_0} \equiv y_x^{'}$$

По условию

$$c^2 = \frac{c_0^2}{1-y/y_o} \Rightarrow$$

$$y_x^{'} = \sqrt{\frac{c_0^2}{c^2\sin^2\alpha_0} - 1} = \sqrt{\frac{c_0^2/\sin^2\alpha_0}{c_0^2/(1-y/y_0)} - 1} \Rightarrow$$

$$y_x^{'} = \sqrt{\frac{1-y/y_0}{\sin^2\alpha_0} - 1} = \frac{1}{\sin\alpha_0}\sqrt{\cos^2\alpha_0 - y/y_0}$$

Отсюда, кстати, $y_m = y_0 \cos^2\alpha$

2) Дальше требуется угадать решение дифф. уравнения (для школьника)

а) $y = ax + bx^2$ ……

б) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha_0 - y/y_0}}$, тут сразу понятно, что $x \sim \sqrt{\alpha-\beta y}$

Рассмотрим случай а):

$$y' = ay + 2bx = \frac{1}{\sin\alpha_0}\sqrt{\cos 2\alpha_0 - \frac{ax+bx^2}{y_0}} =>$$

$$\left(a\sin\alpha_0 + 2b\sin\alpha_0 x\right)^2 = \cos^2\alpha_0 - \frac{ax}{y_0} - \frac{b}{y_0}x^2$$

$$a^2\sin^2\alpha_0 = \cos^2\alpha_0 => a^2 = \frac{\cos^2\alpha_0}{\sin^2\alpha_0}$$

$$4b^2\sin^2\alpha_0 x^2 = -\frac{b}{y_0}x^2 => 4b = -\frac{1}{y_0\sin^2\alpha_0}$$

$$4ab\sin^2\alpha_0 = -\frac{a}{y_0} => 4b = -\frac{1}{y_0\sin^2\alpha_0}$$

$$y = ctg\alpha_0\cdot x - \frac{1}{4y_0\sin^2\alpha_0}x^2 =>$$

$$y = x\cdot ctg\alpha_0\left[1-\frac{x}{4\cos\alpha_0\sin\alpha_0}\right] =>$$

$$y = x\cdot ctg\alpha_0\left[1-\frac{x\cdot ctg\alpha_0}{4y_m}\right]$$ - парабола