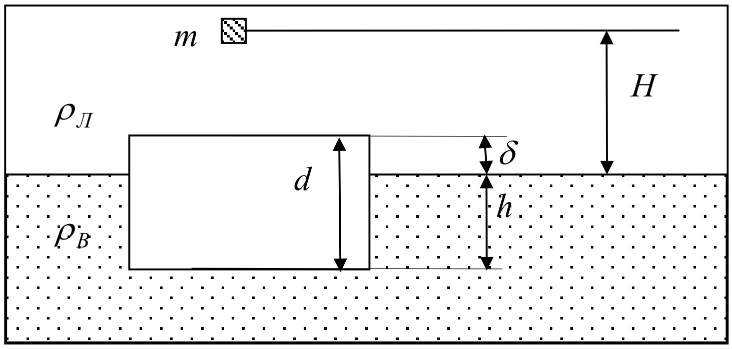
Задача 1



1) Пусть h - глубина погружения льдины. Тогда она связана с высотой льдины соотношением

$$h = d\frac{\rho_Л}{\rho_B},$$

а высота части находящейся над водой равна

$$\delta = d - h = d\left(1 - \frac{\rho_Л}{\rho_B}\right).$$

2) Далее существует два способа рассуждения. В одном из них сначала нужно обсудить физические особенности задачи, а потом искать математическое решение. При другом способе решения, который наиболее часто используется, сразу решается математическая задача. При этом теряются некоторые физические особенности задачи.

Начнем со второго.

Из закона сохранения энергии следует

$$mg(H-\delta) = \frac{1}{2}mV_0^2.$$

Здесь V_0 - скорость тела при соприкосновении со льдиной.

3) Из закона сохранения импульса следует

$$mV_0 = (m+M)V_H,$$

где V_H - начальная скорость льдины и тела как единого целого.

4) Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{m+M}{2}V_H^2 + (m+M)g\delta = A_A,$$

где A_A - работа силы Архимеда. В этой задаче сила Архимеда не постоянна, а зависит от глубины погружения. В начальном положении - $F_{нач} = Sh\rho_в g$. В конечном - $F_{конеч} = Sd\rho_в g$

Работу находим, беря среднее арифметическое от сил, и умножая на перемещение.

$$A_A = \frac{1}{2}(Sh\rho_в g + Sd\rho_в g)\delta.$$

5) После подстановки получаем:

$$\frac{m+M}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 V_0^2 + (m+M)g\delta = \frac{1}{2}Sg\delta\rho_в(h+d)\delta,$$

откуда

$$\frac{m+M}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 2g(H-\delta) + (m+M)g\delta = \frac{1}{2}Sg\delta\rho_в(h+d).$$

После упрощений получаем

$$\frac{m^2}{(m+M)}(H-\delta) + (m+M)\delta = \frac{1}{2}\delta M\left(1+\frac{\rho_B}{\rho_Л}\right).$$

Отсюда уже находим искомый ответ:

$$H = \delta\frac{M}{m}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_B}{\rho_Л}-1\right)\frac{m+M}{m}-1\right).$$

6) Это соотношение содержит решения с удивительными значениями высоты H. Например, высота H может оказаться меньше δ. Чтобы сделать эту зависимость явной, перепишем полученное соотношение в следующем виде:

$$H-\delta = \delta\frac{M+m}{m}\left(\frac{m_{кр}}{m}-1\right).$$

Здесь введено понятие критической массы

$$m_{кр} = \frac{1}{2}M\left(\frac{\rho_B}{\rho_Л} - 1\right).$$

Физический смысл этой величины заключается в том, что если тело больше этой массы, то оно утопит льдину, даже если его положить на льдину с нулевой скоростью.

Таким образом, ответ следующий

Если $m \le m_{кр}$

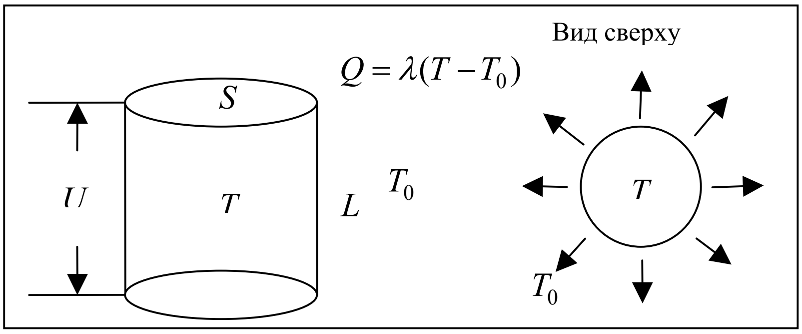
$$H = \delta \frac{M}{m}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_B}{\rho_Л} - 1\right)\frac{m+M}{m} - 1\right) \text{ или } H - \delta = \delta \frac{M+m}{m}\left(\frac{m_{кр}}{m} - 1\right).$$

Если $m > m_{кр}$, то решение отсутствует, то есть, льдина всегда утонет.

7) Максимальная скорость будет достигнута при прохождении точки равновесия.

Задача 2

В стационарном режиме всё Джоулево тепло уходит через поверхность:



$$\frac{U^2}{R} = Q_{гр} => \frac{U^2}{\rho_0 + \alpha(T - T_0)} \cdot \frac{S}{L} = \lambda(T - T_0)L \cdot l,$$

где l - длина окружности (границы поперечного сечения).

Введём неизвестную $t = T - T_0$, для которой получаем квадратное уравнение:

$$\frac{U^2 s}{\lambda L^2 l} = t(\rho_0 + \alpha t) = \alpha\left(t^2 + \frac{\rho_0}{\alpha}t\right) => t^2 + 2\frac{\rho_0}{2\alpha}t = \frac{U^2 s}{\alpha\lambda L^2 l} \equiv A^2$$

Отсюда, $\left(t + \frac{\rho_0}{2\alpha}\right)^2 = A^2 + \left(\frac{\rho_0}{2\alpha}\right)^2 => t = -\frac{\rho_0}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{\rho_0}{2\alpha}\right)^2 + A^2}$

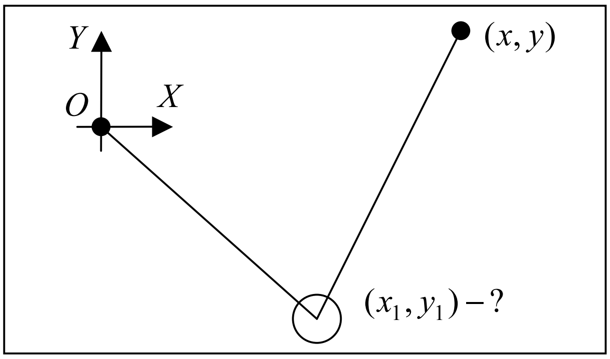
Найдем ток:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\rho_0 + \alpha\left[\sqrt{\left(\frac{\rho_0}{2\alpha}\right)^2 + \frac{U^2 s}{\alpha\lambda L^2 l}} - \frac{\rho_0}{2\alpha}\right]}.$$

при малых U $I \approx \frac{U}{\rho_0}$, при больших U $I \approx \frac{L}{\sqrt{\alpha \frac{s}{\lambda l}}}$, величина $l = 2\pi\rho = 2\pi\sqrt{\frac{\pi\rho^2}{\pi}} = 2\sqrt{\pi}\sqrt{s}$.

Задача 3

$$\begin{matrix} L_1 \sin\alpha + L_2 \sin\alpha = x => \\ L_2 \cos\alpha - L_1 \cos\alpha = y => \end{matrix} \begin{cases} L_2 + L_1 = \dfrac{x}{\sin\alpha} = L \\ L_2 - L_1 = \dfrac{y}{\cos\alpha} \end{cases}.$$



Следовательно,

$$\sin\alpha = \frac{x}{L} => \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}}.$$

$$2L_2 = L + \frac{y}{\cos\alpha} \qquad 2L_1 = L - \frac{y}{\cos\beta} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = L_1 \sin\alpha \\ y_0 = -L_1 \cos\alpha \end{cases}$$. Отсюда

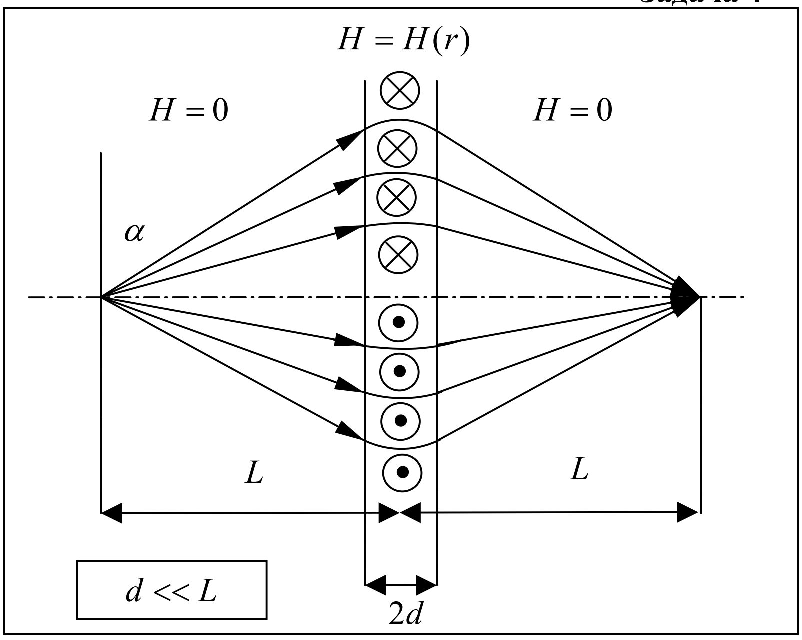
$$x_0 = \frac{1}{2}\left\{L - \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 / L^2}}\right\} \cdot \frac{x}{L}, y_0 = -\frac{1}{2}\left\{L - \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 / L^2}}\right\}\sqrt{1 - x^2 / L^2} = -\frac{1}{2}\left\{\sqrt{L^2 - x^2} - y\right\}.$$

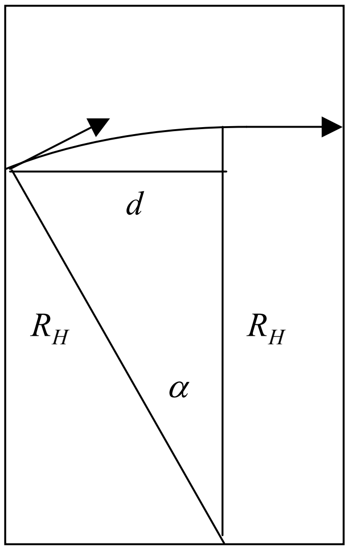
Окончательно

$$x_0 = \frac{x}{2}\left\{1 - \frac{y}{\sqrt{L^2 - x^2}}\right\} \text{ и } \quad y_0 = \frac{1}{2}\left\{y - \sqrt{L^2 - x^2}\right\}.$$

Дополнительные баллы – за нахождение условий для координат второго конца веревки.

Задача 4





Частицы, вылетевшие под углом α должны в итоге повернуть на угол 2α.

С одной стороны $\sin\alpha \sim \frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2}}$. Поворот на угол α с этой точки зрения: $\sin\alpha = \frac{d}{R_н}$,

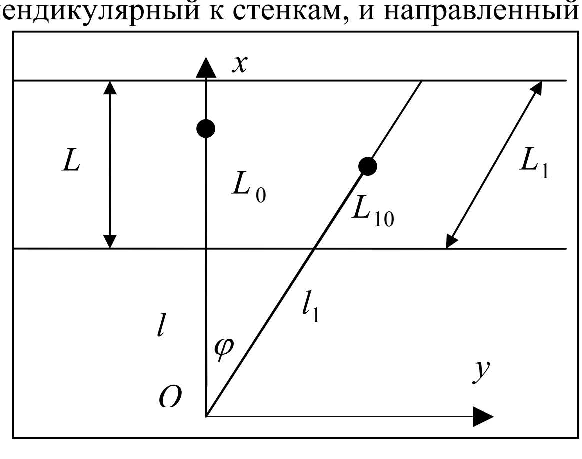
Таким образом $\frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2}} = \frac{d}{R_н}$.

Радиус $R_н$ находим из силы Лоренца: $F_л = m\frac{v^2}{R_н} = evH \Rightarrow R_н = \frac{mv}{eH}$.

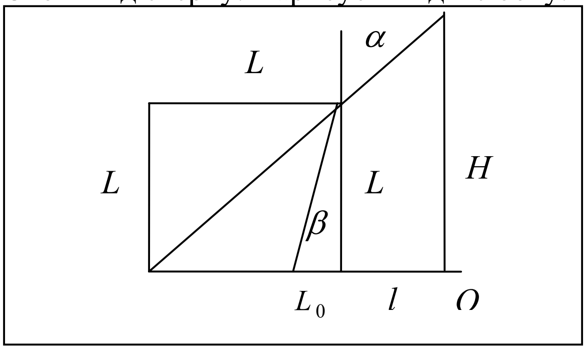
Отсюда $\frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2}} = \frac{deH}{mv} \Rightarrow H = \frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2}} \cdot \frac{mv}{ed}$.

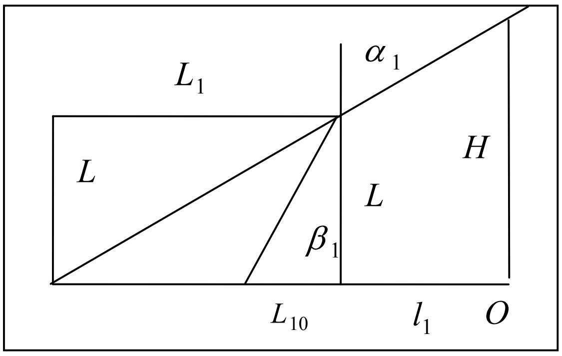
Задача 5

1. Рассмотрим два луча: перпендикулярный к стенкам, и направленный под некоторым углом φ.



Это – вид сверху. Нарисуем виды с боку.





Рассмотрим пустой сосуд.

$$\frac{H}{L} = \frac{L+l}{L} \qquad\qquad \frac{H}{L} = \frac{L_1+l_1}{L_1}$$

Отсюда следует $\dfrac{l}{L} = \dfrac{l_1}{L_1}$.

Значит ближний край сосуда с точки зрения наблюдателя совпадает с дальним краем дна сосуда.

Рассмотрим полный сосуд.

$$\sin^2\alpha = n^2\sin^2\beta \qquad\qquad \sin^2\alpha_1 = n^2\sin^2\beta_1$$

Отсюда

$$\frac{L^2}{L^2+L^2} = n^2\frac{L_0{}^2}{L_0{}^2+L^2} \qquad\qquad \frac{L_1{}^2}{L^2+L_1{}^2} = n^2\frac{L_{10}{}^2}{L_{10}{}^2+L^2}$$

Можно сразу найти $L_0{}^2 = \dfrac{L^{\,2}}{2n^2-1}$. Это случай $\varphi = 0$.

Для произвольного угла φ находим.

$$L_{10}{}^2 = L^2\frac{1}{n^2\left(1+\dfrac{L^2}{L_1{}^2}\right)-1} = L^2\frac{1}{n^2(1+\cos^2\varphi)-1} = (r-l/\cos\varphi)^2$$

Здесь мы перешли к переменной r.

Отсюда имеем:

$$(x-l)^2 = L^2\frac{\cos^2\varphi}{n^2(1+\cos^2\varphi)-1}$$

Или в декартовых координатах

$$(x-l)^2 = L^2\frac{x^2}{n^2(2x^2+y^2)-(x^2+y^2)} = L^2\frac{x^2}{(2n^2-1)x^2+(n^2-1)y^2}.$$

При малых ординатах разложение дает:

$$(x-l)^2 = L_0{}^2\frac{1}{1+\dfrac{(n^2-1)}{2n^2-1)}\dfrac{y^2}{x^2}} \approx L_0{}^2\frac{1}{1+\dfrac{(n^2-1)}{2n^2-1)}\dfrac{y^2}{(L_0+l)^2}} \approx L_0{}^2\left(1-\frac{(n^2-1)}{2n^2-1)}\frac{y^2}{(L_0+l)^2}\right)$$

Приближенный ответ:

$$S \approx L(L-L_0) = L^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}\right) = L^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{16}{9}\right)\ -1}}\right) = L^2\left(1-\frac{3}{\sqrt{32\ \ -9}}\right) =$$

$$= L^2\left(1-\frac{3}{\sqrt{32\ \ -9}}\right) = L^2\left(1-\frac{3}{\sqrt{23}}\right).$$