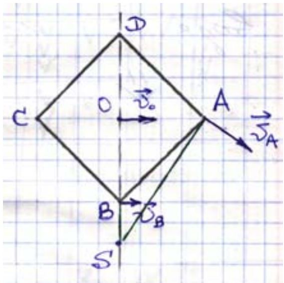
Решения задач 11 класса.

1. По горизонтальной поверхности скользит квадратная пластинка ABCD. В некоторый момент времени вершина A пластинки движется со скоростью $\vec{v}_A$, равной по модулю 5 м/с, а соседняя вершина B – со скоростью $\vec{v}_B$, равной по модулю 1 м/с. При этом скорость $\vec{v}_O$ точки O (центра пластинки) направлена перпендикулярно диагонали BD. Найдите модуль скорости $\vec{v}_O$ в данный момент времени.

Решение

Поскольку скорость центра пластинки (точки O) направлена перпендикулярно диагонали BD, то это означает, что пластинка в данный момент времени вращается вокруг некоторой оси, перпендикулярной плоскости пластинки. Данная ось пересекает плоскость рисунка в точке S, которая расположена на прямой BD (см. рис.).



Тогда мы можем записать следующее соотношение между скоростями точек O, A и B и их скоростями:

$$\frac{v_O}{OS} = \frac{v_A}{AS} = \frac{v_B}{BS}.$$

Обозначим длину стороны квадрата через *a*, расстояние BS через *x*. Тогда соотношение перепишется в виде:

$$\frac{v_O}{a/\sqrt{2} + x} = \frac{v_A}{AS} = \frac{v_B}{x}.$$

Расстояние AS можем определить по теореме косинусов из треугольника ABS.

$$AS^2 = x^2 + a^2 - 2ax\cos 135^0 = x^2 + a^2 + \sqrt{2}ax.$$

Из второго равенства $\frac{v_A}{AS} = \frac{v_B}{x}$ получаем: $\frac{1}{x^2 + a^2 + \sqrt{2}ax} = \frac{25}{x^2}$.

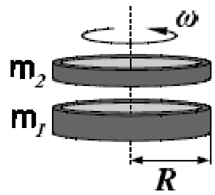
Откуда находим $24x^2 - \sqrt{2}ax - a^2 = 0$ и $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{6}a$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{8}a$. Два полученных значения *x* соответствуют случаям расположения оси S вне и внутри пластинки, соответственно.

Для получения скорости центра используем формулу $\frac{v_O}{a/\sqrt{2} + x} = \frac{v_B}{x}$ т.е. $v_O = \frac{a/\sqrt{2} + x}{x} v_B$.

Для случая $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{6}a$ получаем $v_O = 4$ м/с, а для $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{8}a$ – $v_O = 3$ м/с.

Таким образом, модуль скорости $\vec{v}_O$ в данный момент времени может иметь два различных значения: 3 м/с и 4 м/с.

2. На гладком столе лежит тонкое кольцо массы m_1 и радиуса R. На него сверху кладут шероховатое кольцо такого же радиуса, которое вращается с угловой скоростью ω. Масса верхнего кольца равна m_2. Пренебрегая трением нижнего кольца о стол, определите, какая угловая скорость вращения колец на столе установится через большой промежуток времени. Сколько тепла выделится при установлении этого вращения?



Решение

Способ I

Так как в системе действует трение, часть механической энергии переходит в тепло. На вращающиеся кольца не действует внешних сил, тормозящих вращение. То есть верхнее кольцо раскручивает нижнее за счет того, что его собственное вращение тормозится. Строго говоря, кусочки верхнего и нижнего колец массами Δm_1 и Δm_2, имея скорости V_1 и V_2, с помощью силы трения обмениваются друг с другом импульсом, пока скорости вращения не выравниваются (см. рис.). При этом закон сохранения импульса для маленьких кусочков в проекции на направление движения этих кусочков в данный момент всегда выполняется: $\Delta P = \Delta m_1 V_1 + \Delta m_2 V_2 = \text{const}$. Значит, и суммарная величина импульсов всех кусочков P, спроецированных на направление их движения, неизменна. В начальный момент, когда движется только верхнее кольцо, эта величина равна $M_2 \omega R$. В конце, когда угловые скорости вращения обоих колец стали равны одной и той же величине ω', величина $P = (M_1 + M_2)\omega' R$, откуда

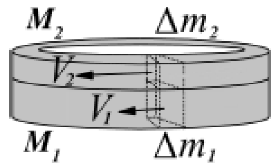


Рис.

$$M_2 \omega R = (M_1 + M_2)\omega' R \qquad => \qquad \omega' = \frac{M_2}{M_1 + M_2}\omega.$$

Все точки вращающегося кольца имеют одну и ту же скорость. Значит, кинетическая энергия верхнего кольца первоначально $E = M_2(\omega R)^2/2$. В конце оба кольца имеют одинаковую угловую скорость ω', поэтому их кинетическая энергия $E' = (M_1 + M_2)(\omega' R)^2/2$. Разность этих энергий дает выделившееся в системе тепло

$$U = \frac{M_2 \omega^2 R^2}{2} - \frac{(M_1 + M_2)R^2}{2}\left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\omega\right)^2 = \frac{M_1 M_2 \omega^2 R^2}{2(M_1 + M_2)}.$$

Способ II

Известно, что момент инерции кольца массой M и радиуса R равен $I = MR^2$. Момент импульса системы из двух колец сохраняется, т.к. мы пренебрегаем трением нижнего кольца о стол. В итоге, кольца будут вращаться с одинаковой угловой скоростью ω'. Запишем закон сохранения момента импульса $I_2\omega = I_1\omega' + I_2\omega'$; расписав моменты инерции получаем

$$M_2 R^2 \omega = M_1 R^2 \omega' + M_2 R^2 \omega' \qquad => \qquad \omega_k = \frac{M_2}{M_1 + M_2}\omega.$$

Вращательная кинетическая энергия кольца имеет вид $E' = I\omega^2/2$. Тогда закон сохранения энергии для нашей системы запишется следующим образом:

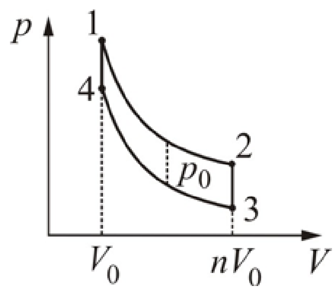
$$\frac{I_2\omega^2}{2} = \frac{I_1\omega'^2}{2} + \frac{I_2\omega'^2}{2} + U,$$

где U – энергия, выделившаяся в виде тепла. Подставляя в эту формулу $I_{1,2} = M_{1,2}R^2$ и ω', получаем

$$U = \frac{M_1 M_2 \omega^2 R^2}{2(M_1 + M_2)}.$$

Ответ: Установившаяся угловая скорость окажется равной $\omega' = M_2\omega/(M_1 + M_2)$. Количество выделившегося тепла составит $U = M_1 M_2 \omega^2 R^2/(2M_1 + 2M_2)$.

3. Над идеальным одноатомным газом совершают циклический процесс 1–2–3–4–1, график которого изображен на pV-диаграмме. Минимальный объем газа равен V_0, а максимальный – в n раз больше. Участки 2–3 и 4–1 – изохоры, участок 3–4 – адиабата, а участок 1–2 получен из участка 3–4 сдвигом на величину p_0 вверх вдоль оси давления. Определите количества теплоты, полученные или отданные на участках 1–2, 2–3, 4–1, а также КПД этого цикла.



Решение

Участок 2-3 – изохора, поэтому количество тепла дается формулой $Q_{23} = \nu C_V \Delta T$. Для одноатомного газа имеем $C_V = \frac{3}{2}R$. Тогда $Q_{23} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}V\Delta p = -\frac{3}{2}nV_0 p_0$.

Участок 4-1 – изохора, поэтому аналогично получаем $Q_{41} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}V\Delta p = \frac{3}{2}V_0 p_0$.

Участок 1-2 не является изопроцессом, поэтому для получения количества теплоты Q_{12} воспользуемся I началом термодинамики для цикла.

$$\Delta Q = A_{\text{öèêë}}.$$

Поскольку участок 3-4 – адиабата, то $Q_{34} = 0$ и тогда $\Delta Q = Q_{12} + Q_{34} + Q_{41}$.

Работу за цикл вычислить несложно, учитывая, что работа численно равна площади фигуры 1-2-3-4-1. Поскольку участок 1-2 получен параллельным переносом участка 4-3, то

$$A_{\text{öèêë}} = (nV_0 - V_0)\,p_0 = (n-1)V_0 p_0.$$

Таким образом $Q_{12} = A_{\text{öèêë}} - Q_{34} - Q_{41} = (n-1)V_0 p_0 + \frac{3}{2}nV_0 p_0 - \frac{3}{2}V_0 p_0 = \frac{5}{2}(n-1)V_0 p_0$.

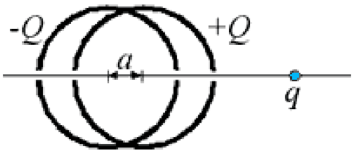
КПД вычислим по определению

$$\eta = \frac{A_{\text{öèêë}}}{Q_{\text{ïîëó÷}}}\cdot 100\%.$$

Газ получал тепло на участках 1-2 и 4-1. (Газ получает тепло на всем участке 1-2, так как в любой точке этого участка проходящая через неё адиабата, полученная растяжением адиабаты 3-4 вверх, поднимается круче, чем сам участок 1-2, полученный параллельным переносом адиабаты.) Поэтому

$$\eta = \frac{A_{\text{öèêë}}}{Q_{12}+Q_{41}}\cdot 100\% = \frac{(n-1)V_0 p_0}{\frac{5}{2}(n-1)V_0 p_0 + \frac{3}{2}V_0 p_0}\cdot 100\% = \frac{2(n-1)}{5(n-1)+3}\cdot 100\%.$$

4. Две одинаковые сферы радиуса R расположены так, что расстояние между их центрами равно $a < R$ (сферы пересекают друг друга). Сферы диэлектрические и равномерно заряженные, заряды сфер разноименные и по модулю равны Q (см. рис.). По леске, пронизывающей сферы насквозь, может свободно скользить маленькая заряженная бусинка массы m с зарядом $q < 0$. Первоначально бусинка находится бесконечно далеко от сфер и приближается к ним со скоростью v. Где остановится бусинка? Считайте, что бусинка может проникать внутрь каждой сферы через маленькую дырочку.



Решение

Задачу проще всего решать при помощи закона сохранения энергии: бусинка остановится, когда вся ее кинетическая энергия $mV^2/2 > 0$ перейдет в потенциальную энергию $q\varphi$ электрического взаимодействия (конечно, при движении заряженой бусинки она будет излучать электромагнитные волны; однако соответствующими потерями мы пренебрегаем), здесь φ - потенциал, который в точке остановки бусинки создают обе сферы.

По теореме Гаусса равномерно заряженая сфера снаружи от себя создает такое же поле (напряженность и потенциал), как точечный заряд, расположенный в центре сферы, величина которого равна полному заряду сферы. Внутри же себя полая сфера не создает поля (напряженность равна нулю), так что для перемещения пробного заряда внутри сферы не нужно затрачивать работу, и, следовательно, потенциал электрического поля внутри сферы постоянен (такой же как на поверхности).

Пусть бусинка находится справа, снаружи от обеих сфер, на расстоянии $x > R$ от центра положительно заряженой сферы. Потенциал создаваемый каждой сферой здесь легко определить, стянув заряд каждой сферы в ее центр и воспользовавшись формулой для потенциала точечного заряда. Потенциал этот равен $\varphi = \frac{kQ}{x} - \frac{kQ}{x+a} > 0$. Так как $q < 0$, энергия $q\varphi < 0$, так что равенство $q\varphi = mV^2/2$ в этой области не может реализоваться. Значит, бусинка не может остановиться в этой области.

Пусть теперь бусинка находится внутри положительно заряженой сферы, но снаружи от отрицательно заряженой сферы ($x < R$, $x+a > R$). Потенциал отрицательно заряженой сферы здесь считается как и в предыдущем случае, а вот потенциал положительной сферы такой же, как на ее поверхности, kQ/R. Итак, $\varphi = \frac{kQ}{R} - \frac{kQ}{x+a}$ так что условие остановки бусинки $q\varphi = \frac{kQq}{R} - \frac{kQq}{x+a} = mV^2/2$ можно разрешить относительно x: $x = \frac{2kQ|q|R}{2kQ|q|+mV^2R} - a$ напомним, что $q < 0$. Видно, что неравенство $x+a > R$ никогда не выполняется для таких x.

В области внутри обеих сфер каждая сфера создает такой же потенциал, как на своей поверхности, т.е. $\pm kQ/R$, так что полный потенциал φ здесь равен нулю. При $V > 0$ равенство $q\varphi = mV^2/2$ также не может выполняться.

В области внутри отрицательно заряженой сферы, но снаружи от положительной ($x > R$, $x-a < R$) потенциал положительной сферы считается с помощью формулы точечного заряда, а потенциал отрицательной сферы равен $-kQ/R$. Итак, $\varphi = \frac{kQ}{x} - \frac{kQ}{R}$, так что условие остановки бусинки $q\varphi = \frac{kQq}{x} - \frac{kQq}{R} = mV^2/2$ можно разрешить относительно x:

$$x = \frac{2kQ|q|R}{2kQ|q|-mV^2R} \quad (*).$$

Для решения (*) можно заметить, что условие $x > R$ выполняется всегда. Условие $x-a < R$ налагает ограничение на V:

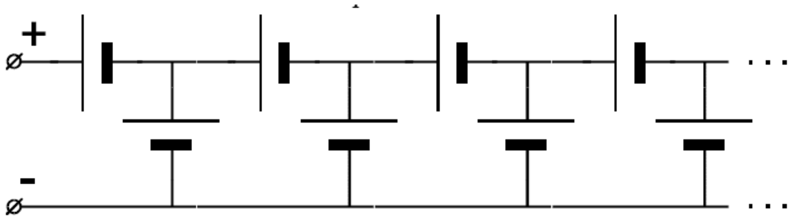
$$V < \sqrt{\frac{2kQ|q|a}{mR(R+a)}} \quad (**).$$

Очевидно, что если оно выполняется, выражение (*) положительно.

Рассмотрим последний случай, когда бусинка находится слева, снаружи от обеих сфер. Очевидно, что здесь бусинка остановится не может. так как отрицательно заряженная сфера отталкивает бусинку сильнее, чем притягивает положительная.

Итак, ответ: бусинка вообще остановится лишь при выполнении условия (**), это произойдет на расстоянии (*) от положительно заряженной сферы, причем снаружи от нее внутри отрицательной сферы.

5. Найдите ЭДС и внутреннее сопротивление сложного источника с бесконечным числом звеньев (см. рис.). ЭДС и внутреннее сопротивление каждого отдельного элемента равны соответственно ε и *r*.



Решение

Пусть бесконечная цепочка источников эквивалентна одному источнику с ЭДС *E* и внутренним сопротивлением *R*. Поскольку при добавлении одного звена к бесконечной цепочке ничего не меняется, схема, изображённая на Рис. 1, также должна иметь ЭДС *E* и внутреннее сопротивление *R*.

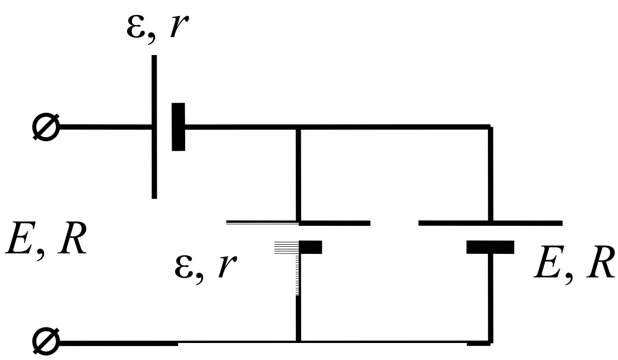


Рис. 1.

Для расчета этой схемы нам потребуются законы параллельного и последовательного соединений источников тока.

Чтобы рассчитать ЭДС и внутреннее сопротивление при параллельном соединении источников (Рис. 2), подключим к источникам резистор сопротивлением R_0 (Рис. 3) и обозначим токи, текущие по участкам цепи, через I_1, I_2 и I_0. По первому правилу Кирхгофа (сумма токов, втекающих в точку *A*, равна сумме токов, вытекающих из этой точки)

$$I_1 + I_2 = I_0.$$

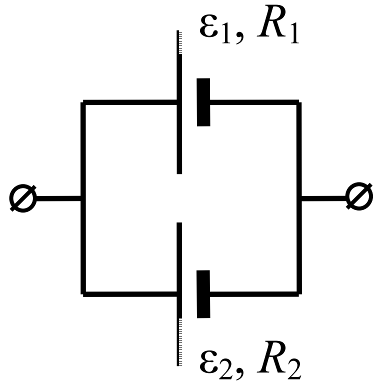


Рис. 2.

По второму правилу Кирхгофа (разность потенциалов *A* и *B* одна и та же вдоль всех трех участков цепи, их соединяющих)

$$\varepsilon_1 - I_1 R_1 = \varepsilon_2 - I_2 R_2 = I_0 R_0.$$

Из полученной системы трех линейных уравнений находятся неизвестные токи I_1, I_2 и I_0. В частности,

$$I_0 = \frac{\left(\dfrac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}\right)}{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_0}.$$

Тот же результат получился бы при подключении резистора R_0 к источнику с ЭДС и внутренним сопротивлением

$$\varepsilon_{пар} = \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}, \quad R_{пар} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Эти формулы и дают закон сложения ЭДС и внутренних сопротивлений при параллельном соединении источников.

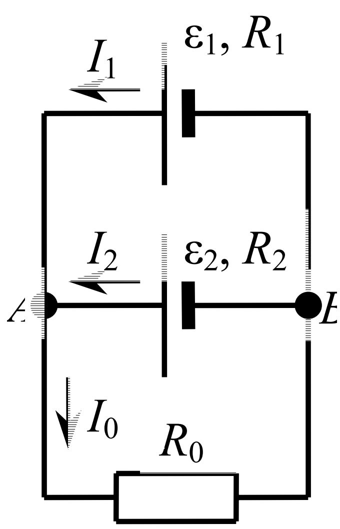


Рис. 3.

Для последовательного соединения источников (Рис. 4) с помощью аналогичных, но более простых рассуждений, можно установить, что

$$\varepsilon_{посл} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad R_{посл} = R_1 + R_2 .$$

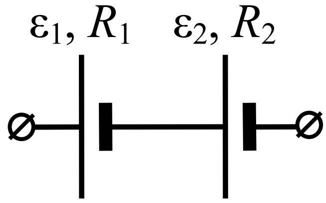


Рис. 4.

Наконец, применяя законы последовательного и параллельного соединений источников к схеме на Рис. 1, получаем

$$E = \varepsilon + \frac{\varepsilon R + Er}{R + r}, \quad R = r + \frac{Rr}{R + r}.$$

Решая эти два уравнения относительно E и R (и выбирая положительный корень квадратного уравнения), приходим к окончательному ответу

$$E = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\varepsilon, \quad R = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}r.$$