1. В маятниковых часах для того, чтобы их ход не зависел от температуры окружающего воздуха, устраивали температурную компенсацию маятника по схеме, изображённой на рис.1.1 Стержни 1 сделаны из одного металла, а стержни 2a, 2b – из другого. Как должны соотноситься коэффициенты температурного расширения стержней 1 и 2 для того, чтобы длина маятника не изменялась с температурой? Длина стержня зависит от температуры как $l = l_0(1+\alpha\Delta t)$, где α - коэффициент линейного расширения, Δt - отклонение температуры, l_0 - длина стержня при $\Delta t = 0$. Длины всех стержней 1, 2a и 2b при $\Delta t = 0$ считать равными.

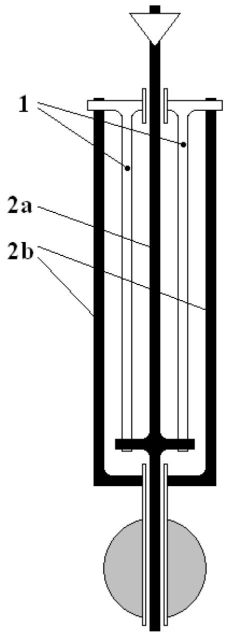

рис.1.1

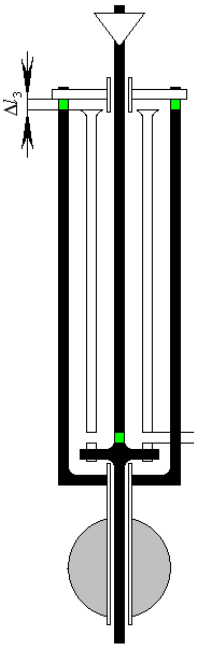

рис.1.2

Решение.
1-й способ (рис.1.1)
Удлинение маятника складывается из удлинений стержней. Допустим, что нагрелся только стержень 2a на Δt градусов. Тогда изменение его длины на Δl_2 приведёт к тому, что маятник опустится на $\Delta x = \Delta l_2$. Но одновременно со стержнем 2a нагреваются на то же Δt и стержни 1. Поскольку их нижние концы скреплены со стержнем 2a, а верхние – не закреплены, то удлинение стержней 1 (на Δl_1) приведёт к подъёму маятника на Δl_1, и результирующее смещение будет $\Delta x = \Delta l_2 - \Delta l_1$. Наконец, учтём одновременное со стержнями 2a и 1 изменение длины стержней 2b (на Δl_3). Они закреплены верхними концами, поэтому их удлинение приведёт к перемещению маятника вниз. Таким образом, общее перемещение маятника будет $\Delta x = \Delta l_2 - \Delta l_1 + \Delta l_3$. Из формулы $l = l_0(1+\alpha\Delta t)$ следует, что изменение длины стержней вследствие нагрева $\Delta l_2 = \Delta l_3 = l_0\alpha_2\Delta t$, $\Delta l_1 = l_0\alpha_1\Delta t$, де α_2 – коэффициент расширения стержней 2a,2b; а α_1 – коэффициент расширения стержня 1. По условию задачи необходимо, чтобы $\Delta x = 0$. Поэтому $\Delta l_1 = 2\Delta l_2$, и $\alpha_1/\alpha_2 = 2$

2-й способ (рис.2.2) Можно исходить из того, что при нагреве длина маятника остаётся постоянной, и найти, каким должно быть удлинение стержней 1 для этого. Из рис.1.2 видно, что стержни 1 должны удлиниться на $\Delta l_1 = \Delta l_2 + \Delta l_3$.

2. Человек поднимается по канату, перекинутому через неподвижный блок и привязанному к его поясу (рис. 2.2). Определить, будет ли выигрыш в силе, необходимой для того, чтобы человек поднялся по канату, по сравнению с тем случаем, когда канат привязан непосредственно к потолку.

Решение.
1-й способ (рис.2.1)
Если человек поднялся на отрезок Δs, то это означает, что его потенциальная энергия увеличилась на $\Delta E = mg\cdot\Delta s$. Источником энергии в данном случае является человек, который совершает работу, равную приращению энергии. Работа, выполняемая человеком, равна $A = F\Delta s$, где F - сила, с которой человек действует на канат, Δs - перемещение каната относительно человека. Приращение потенциальной энергии ΔE зависит только от величины Δs, и не зависит от того, поднимается человек с помощью подвижного блока или по канату, привязанному непосредственно к потолку. Следовательно, и работа, которую совершает человек, в обоих случаях одна и та же. В первом случае: $A_1 = F_1 2\Delta l$, во втором - $A_2 = F_2\Delta l$. Из равенства $A_1 = A_2$ вытекает, что $F_1 = F_2/2$, поэтому будет выигрыш в силе в два раза.

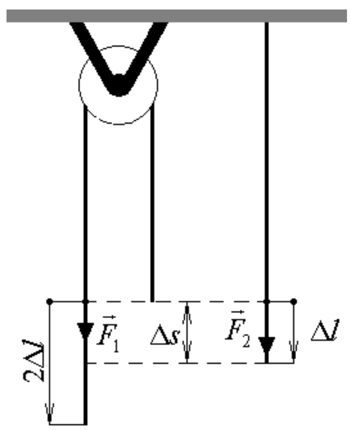

рис.2.1

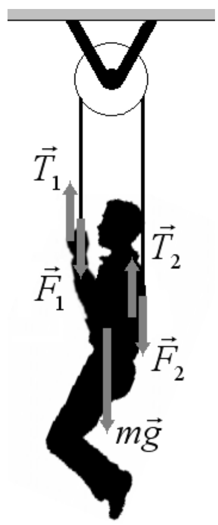

рис.2.2

Решения задач III тура Всеукраинской олимпиады по физике (2009 г.) среди старшеклассников Харьковской области.
Олимпиада состоялась 7 февраля 2009 года в Харьковском национальном университете на базе физико-технического факультета.
Адрес: ХНУ имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков, 61077. http://www-htuni.univer.kharkov.ua

2-й способ (рис.2.2).

По третьему закону Ньютона, величина силы F_1, с которой человек тянет канат, равна величине силы натяжения каната T_1. По второму закону Ньютона, $m\vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g}$. Полагая движение равномерным, в проекции на вертикальную ось получим $0 = T_1 + T_2 - mg$. Силы натяжения двух концов каната приблизительно равны (если пренебречь трением в оси блока): $T_1 = T_2 = T$. Следовательно, $0 = 2T - mg$, $T = mg/2$. С другой стороны, если канат привязан непосредственно к потолку, легко убедиться, что сила натяжения каната равна mg. Поэтому человек должен выбирать канат, который натянут вдвое слабее, по сравнению с тем случаем, когда канат привязан непосредственно к потолку.

3. Найти, чему равна сила трения, действующая на цилиндр со стороны наклонной плоскости, по которой он скатывается без проскальзывания (рис.3), если известно ускорение его центра масс $\vec{a}_0$, масса цилиндра M, угол наклона плоскости к горизонту α. Куда она направлена? Куда направлена сила трения в случае, когда цилиндр закатывается на плоскость (по инерции)?

Решение

По второму закону Ньютона, $M\vec{a}_0 = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}$. В проекции на наклонную плоскость $Ma_0 = Mg\sin\alpha + F_{тр\,X}$, $F_{тр\,X} = Mg\sin\alpha - Ma_0$. Определим направление силы трения.

1-й способ.

Если рассматривать движение цилиндра относительно оси вращения, которая проходит через центр масс, то видим, что и когда цилиндр скатывается, и когда закатывается, его вращение ускоряется в направлении против часовой стрелки. Вращение цилиндра изменяется только под действием силы трения (поскольку остальные силы не создают моментов относительно рассматриваемой оси), поэтому сила трения должна поворачивать цилиндр против часовой стрелки, и направлена, как показано на рис. 3.1

2-й способ.

Рассмотрим скатывание цилиндра (рис.3.2). Допустим, что трения нет. Тогда цилиндр будет не скатываться, а двигаться вниз поступательно, скользя по плоскости, причём точка контакта А цилиндра с плоскостью получает скорость $\vec{V}$ вдоль плоскости вниз. Если же допустить наличие небольшого трения, то очевидно, что сила трения, приложенная к точке А, будет направлена против $\vec{V}$.

Рассмотрим случай, когда цилиндр закатывается на плоскость, причём трение снова отсутствует: цилиндру просто придали такое же самое вращение, как и в случае отсутствия проскальзывания, и одновременно толкнули на плоскость. Тогда вращение цилиндра происходит независимо от движения по плоскости, и со временем поступательное движение замедляется, а вращательное остаётся тем же самым. Поэтому скорость точки контакта А цилиндра снова будет направлена вдоль плоскости вниз. Тогда, если возникает небольшое трение, то соответствующая сила будет направлена снова вдоль плоскости вверх.

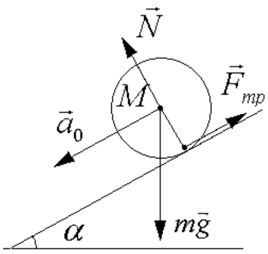

рис.3.1

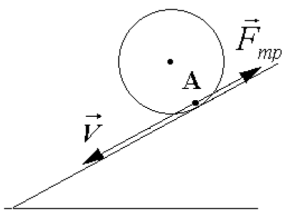

Рис.3.2

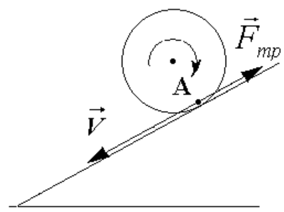

рис.3.3

Примечание: во 2-м способе имеется та неточность, что если цилиндр проскальзывает, то действует сила трения скольжения, а если нет – то сила трения покоя. Направления этих сил не всегда совпадают.

4. Шарик, привязанный к растяжимой нитке, падает вниз без начальной скорости (рис.4). Длина нерастянутой нитки равна *L*, её коэффициент упругости *k*. Найти максимальную скорость шарика. В какой точке она будет достигаться?

Решение.

Разобьём движение шарика на два этапа: 1) падение, но нитка ещё не напряжена (не растянута), 2) движение вниз под действием земного притяжения и силы упругости нитки. Понятно, на протяжении этапа 1) скорость шара будет расти. Когда же нитка начинает

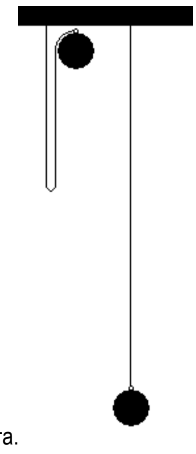
рис.4

растягиваться, возникает сила упругости. Однако, по закону Гука величина силы упругости пропорциональна удлинению нитки, которое не достигается мгновенно. Поэтому скорость будет возрастать ещё некоторое время. Движение на этапе 2) происходит под действием силы упругости, подобно движению, совершаемому маятником на пружинке. Максимальная скорость тела, совершающего колебательное движение, достигается в состоянии равновесия сил, приложенных к телу. В данном случае это происходит, когда $mg = F_{упр.}$. Отсюда можем найти удлинение нитки: $mg = F_{упр} = k\Delta x$, $\Delta x = mg/k$, и шарик пролетит на этот момент расстояние $L + \Delta x = L + mg/k$. Скорость в этой точке найдём из закона сохранения полной механической энергии:

$$mg(L+\Delta x) = \frac{mV_{\max}^2}{2} + \frac{k\Delta x^2}{2}, \qquad V_{\max} = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}$$

5. Два однородных гравитационно взаимодействующих шарика находятся в жидкой среде очень далеко от её краёв. При каких условиях между шариками будет действовать сила отталкивания?

Решение.

Известно, что между любыми двумя материальными телами действует гравитационная сила притяжения, равная $F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$. На шарик 2, находящийся в жидкости, действуют гравитационная сила со стороны жидкости ($\vec{F}_0$), гравитационная сила со стороны шарика 1 ($\vec{F}_1$), а также равнодействующая сил давления со стороны жидкости $\vec{F}_A$. Сумма этих сил и определяет поведение шарика 2.

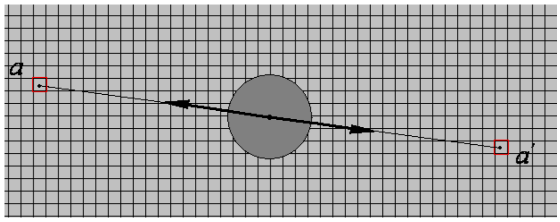

рис.5.1

1) Рассмотрим, как возникает $\vec{F}_0$. Извлечём из жидкости первый шарик, и оставим второй. Тогда, разбив всю жидкость на равные элементы (рис.5.1), убеждаемся, что силы, с которыми они действуют на шарик, будут попарно уравновешивать друг друга. В качестве примера на рис. 5.1 показаны силы, действующие со стороны одинаковых элементов a и a'. Таким образом, суммарная сила равна нулю. Если же рядом поместить 1й шарик, то элементы жидкости покинут объём, занимаемый теперь 1м шариком (рис.5.2), и не смогут уравновесить силы своих парных элементов. В результате появляется

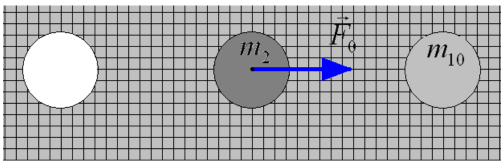

рис.5.2

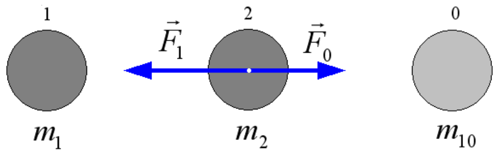

рис.5.3

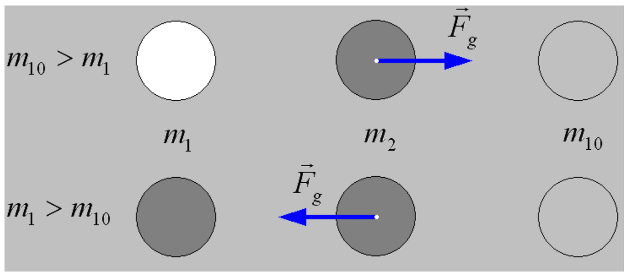

рис.5.4

гравитационная сила $\vec{F}_0$ со стороны жидкости, которая создаётся только массой жидкости m_{10} (рис.5.2), поскольку остальные элементы жидкости по-прежнему уравновешивают друг друга. Масса m_{10} равна массе жидкости, вытесненной 1м шариком.

2) Таким образом, на 2й шарик действуют сила притяжения со стороны шара, состоящего из жидкости массой m_{10}, и со стороны шарика 1, масса которого m_1 (рис.5.3). Расположены они симметрично относительно центра 2го шарика. Поэтому, если тяжелее шарик m_{10}, то суммарная сила гравитации $\vec{F}_g$ будет направлена вправо, а если тяжелее шарик m_1 – то влево (рис.5.4).

3) Кроме того, на шарик 2 действует равнодействующая сил давления со стороны жидкости. Она возникает потому, что шарик 1 кроме шарика 2 притягивает к себе также и жидкость. Точно так возникает сила Архимеда.

Если шарик 2 легче вытесненной им воды, то он двигается против «силы тяжести» $\vec{F}_g$ («всплывает»),

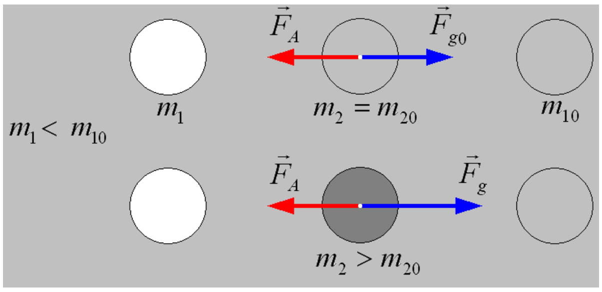

Рис.5.5

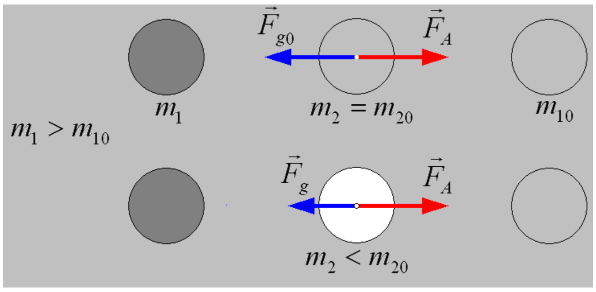

Рис.5.6

а если тяжелее – «тонет». Убедимся в этом. Пусть объём шарика 2 занимает жидкость, обозначим её массу через m_{20} Очевидно, она будет находиться в покое (рис.5.5, рис.5.6). Это значит, что сила $\vec{F}_A$ уравновешивается силой $\vec{F}_{g0}$, действующей на жидкость. Необходимо нарушить равновесие так, чтобы получить силу отталкивания. Если $m_1 < m_{10}$, то для этого надо сделать $F_g > F_A$, т.е. увеличить массу m_2 (рис.5.5). Если же $m_1 > m_{10}$, то надо сделать $F_g < F_A$, т.е. уменьшить m_2. Выражая массы через плотности, согласно формуле $m = \rho V$, получим, что сила отталкивания возникает при $\rho_1 > \rho_{ж}, \rho_2 < \rho_{ж}$, или $\rho_2 > \rho_{ж}, \rho_1 < \rho_{ж}$, где ρ_1, ρ_2 - плотности шариков, $\rho_{ж}$ - плотность жидкости.