Варианты решения задач III тура Всеукраинской олимпиады по физике среди старшеклассников Харьковской области (2009 г.)

Решения задач для 10 класса

1. Закопченную монетку толщиной h=2 мм положили на снег плотностью ρ=500 кг/м^3. Солнце находится на высоте α=20° над горизонтом и освещает монету. За какое время монета погрузится в снег на глубину 2h? Считать, что вся солнечная энергия, поглощаемая монеткой, идет на плавление льда под ней. Плотность потока солнечной энергии (мощность, идущая через единичную площадь, перпендикулярную потоку) I=1,4 кВт/м^2. Удельная теплота плавления снега та же, что и льда: λ=3,4·10^5 Дж/кг. Радиус монетки много больше ее толщины.

Решение: Солнечная энергия E_1 поглощаемая монеткой за время t, равна: $E_1 = IS\sin(\alpha)t$,

где S – площадь монетки.

Энергия, необходимая для плавления слоя льда площадью S и высотой 2h, равна: $E_2 = \lambda\rho S 2h$.

Считая, что вся солнечная энергия, поглощаемая монеткой, идет на плавление льда, приравниваем эти энергии: $E_1 = E_2$.

Отсюда находим искомое время t: $t = \dfrac{2\lambda\rho h}{I\sin(\alpha)}$.

Ответ: $t = \dfrac{2\lambda\rho h}{I\sin(\alpha)}$.

2. В первом эксперименте материальная точка брошена под углом α к горизонту с начальной скоростью величиной v_0. Во втором эксперименте эта же точка начинает двигаться вверх с такой же начальной скоростью по абсолютно гладкой наклонной плоскости, угол наклона которой равен α. Длина наклонной плоскости равна L. В каком случае материальная точка поднимется выше и на какую высоту? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:

В первом эксперименте высота подъема определяется исходя, например, из закона сохранения энергии, который можно применить для вертикальной составляющей скорости $v_y = v\sin(\alpha)$:

$$h = \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}. \ (1)$$

Во втором эксперименте при движении по наклонной плоскости

$$s = \frac{v_0^2 - v^2}{2g\sin(\alpha)}, \ (2)$$

где s – координата вдоль плоскости, а v – текущая скорость.

Если наклонная плоскость достаточно длинная,

$$L \ge \frac{v_0^2}{2g\sin(\alpha)}, \ (3)$$

(т.е. длина плоскости L больше, чем длина пути до точки остановки), то высота подъема h равна

$$h = \frac{v_0^2}{2g}. \ (4)$$

Варианты решения задач III тура Всеукраинской олимпиады по физике (2009 г.) среди старшеклассников Харьковской области.
Олимпиада состоялась 7 февраля 2009 года в Харьковском национальном университете на базе физико-технического факультета.
Адрес: ХНУ имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков, 61077. http://www-htuni.univer.kharkov.ua

Соотношение (4) получаем из (2) как $h = s\sin(\alpha)$ при $v = 0$.
Если наклонная плоскость короткая,

$$L < \frac{v_0^2}{2g\sin(\alpha)}, (5)$$

(т.е. длина плоскости L меньше, чем длина пути до точки остановки), то высота подъема h складывается из высоты подъема по плоскости, $L\sin(\alpha)$ и высоты свободного подъема, $\frac{v_1^2\sin^2(\alpha)}{2g}$, где из (2) находим $v_1^2 = v_0^2 - 2gL\sin(\alpha)$. В итоге получаем для высоты подъема в случае короткой наклонной плоскости

$$h = \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g} + L\sin(\alpha)\cos^2(\alpha). (6)$$

Итак, *в первом эксперименте* при свободном полете высота подъема равна

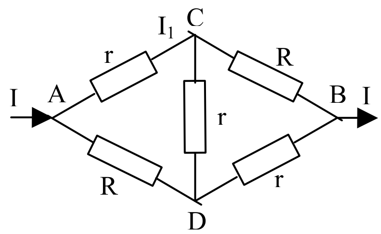
$$h = \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}. \quad (7)$$

Во втором эксперименте с наклонной плоскостью высота подъема равна

$$h = \begin{cases} \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g} + L\sin(\alpha)\cos^2(\alpha), L < \frac{v_0^2}{2g\sin(\alpha)}, \\ \frac{v_0^2}{2g}, L \geq \frac{v_0^2}{2g\sin(\alpha)}. \end{cases} \quad (8)$$

Видим, что всегда, когда есть наклонная плоскость, высота подъема будет больше.
И понятно почему.

3. Найти электрическое сопротивление схемы между точками A и B.



Решение:

Пусть ток втекающий в точку A извне схемы равен I, а ток на участке AC – I_1. Тогда ток на участке AD равен $(I-I_1)$ (первый закон Кирхгофа). Из симметрии схемы следует, что ток на участке DB равен току на участке AC, т.е. равен I_1. А ток на участке CB - $(I-I_1)$.

Тогда ток на участке CD равен $(2I_1-I)$.

Применяя закон Ома для контура ACD (второй закон Кирхгофа), получаем:

$$rI_1+r(2I_1-I)-R(I-I_1)=0.$$

Отсюда находим ток I_1: $I_1 = \frac{r+R}{3r+R}I$.

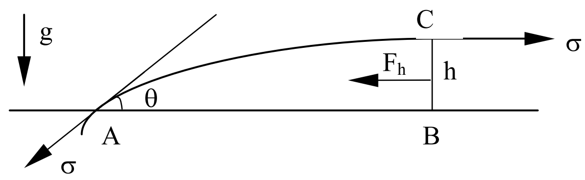
Падение напряжения между точками A и B равно, например,

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CD} = rI_1 + R(I - I_1) = \frac{r(r+3R)}{(3r+R)}I.$$

Отсюда получаем для сопротивления между точками AB: $\frac{r(r+3R)}{(3r+R)}$.

Ответ: $\frac{r(r+3R)}{(3r+R)}$.

4. На твердую горизонтальную поверхность налили достаточно большой объем жидкости. Найти толщину слоя жидкости h. Известен краевой угол θ, плотность жидкости ρ, поверхностное натяжение σ и ускорение свободного падения g.



Решение:
Условие равновесия жидкости, заключенной в объеме ABC, дает

$$\sigma\cos\theta + F_h = \sigma .$$

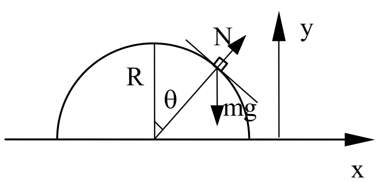
Здесь мы спроектировали силы, действующие на объем ABC, на горизонтальное направление. В правой части равенства σ - это сила поверхностного натяжения, приложенная к единице длины прямой линии, проекция которой на рисунке есть точка C. Аналогично для точки A. F_h – это сила суммарного гидростатического давления, приложенного к CB. В точке C гидростатическое давление равно нулю, а в точке B равно ρgh. Поскольку давление меняется линейно с глубиной, то среднее значение давления - ρgh/2. Тогда суммарная сила гидростатического давления F_h равна: $F_h = h\dfrac{\rho g h}{2}$.

Из этих двух соотношений находим толщину слоя жидкости h: $h = 2\sin\left(\theta/2\right)\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho g}}$.

Условие достаточно большого объема жидкости нужно для того, чтобы можно было бы пренебречь второй кривизной, в частности на краю A по сравнению с кривизной линии AC в точке A.

Ответ: $h = 2\sin\left(\theta/2\right)\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho g}}$.

5. Твердая полусфера покоится в начальный момент на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности. С верхней точки полусферы с нулевой начальной скоростью соскальзывает без трения материальная точка с массой совпадающей с массой полусферы. Найти угол отрыва материальной точки от полусферы.



Решение:
Законы сохранения горизонтальной составляющей импульса и энергии дают

$$mv_x + MV_x = 0 , \ (1)$$

$$\frac{MV_x^2}{2} + \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} = mgR(1-\cos\theta) , \ (2)$$

где m - масса материальной точки, M - масса полусферы, v_x и v_y - проекции на оси x и y скорости материальной точки, а V_x - проекция на ось x скорости полусферы.

Поскольку масса m движется по окружности, то из закона сложения скоростей находим

$$v_x = V_x + R\omega\cos\theta, \; (3)$$
$$v_y = -R\omega\sin\theta, \; (4)$$

где $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ - угловая скорость.

В принципе, уравнений (1)-(4) достаточно, чтобы найти, проинтегрировав, $\theta(t)$ до самого отрыва. Но нас тут интересует лишь угол отрыва. Рассмотрим условие отрыва.

В момент отрыва сила реакции $N = 0$. В системе отсчета, связанной с полусферой, масса m до самого отрыва движется по окружности радиуса R. Начиная с момента отрыва система связанная с полусферой является инерциальной системой отсчета. Поэтому для нормального ускорения массы m в момент отрыва можем написать: $a_n = \dfrac{\tilde{v}^2}{R}$, (5)

где $\tilde{v}^2 = \omega^2 R^2$ - квадрат скорости материальной точки в системе покоя полусферы.

(Отметим, что как следует из (3)-(4) $\tilde{v}^2 = (v_x - V_x)^2 + v_y^2$).

Поскольку в момент отрыва сила реакции $N = 0$, то это нормальное ускорение массе m сообщает лишь нормальная составляющая силы тяжести, $g\cos\theta$.

Таким образом, условие отрыва можно записать в виде: $\omega^2 R = g\cos\theta$. (6)

В (6) под θ понимается уже фиксированное значение угла отрыва.

Исключая алгебраически из уравнений (1)-(4) и (6) величины V_x, v_x, v_y и ω, получим кубическое уравнение: $\cos^3\theta - 3p\cos\theta + 2p = 0$, (7),

где $p = 1 + \dfrac{M}{m}$.

В предельном случае m<<M ($p = \infty$) получаем известный результат $\cos\theta = \dfrac{2}{3}$. А если m>>M ($p = 1$) получаем очевидный результат $\cos\theta = 1$, т.е. $\theta = 0$.

В нашем случае $m = M$ ($p = 2$) уравнение (7) принимает вид

$$\cos^3\theta - 6\cos\theta + 4 = (\cos\theta - 2)(\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2) = 0. \quad (8)$$

Откуда получаем единственный пригодный корень

$$\cos\theta = \sqrt{3} - 1.$$

Ответ: угол отрыва равен $\cos\theta = \sqrt{3} - 1$.

Варианты решения задач III тура Всеукраинской олимпиады по физике (2009 г.) среди старшеклассников Харьковской области.
Олимпиада состоялась 7 февраля 2009 года в Харьковском национальном университете на базе физико-технического факультета.
Адрес: ХНУ имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков, 61077. http://www-htuni.univer.kharkov.ua