Лекція №18

Феромагнетики й антиферомагнетики

1. Взаємодія між елементарними збудженнями

На минулій лекції ми отримали спектр ізотропного феромагнетика за малих збуджень. При цьому ми виходили із здобутого нами гамільтоніану:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}, \tag{1}$$

де

$$\hat{H}_0 = E_0 + \left[\mu B + L(0)\right]\sum_{\mathbf{n}} \hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{n}} - S\sum_{\mathbf{n}\neq\mathbf{m}} J\left(\mathbf{n}-\mathbf{m}\right)\hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{m}}, \tag{2}$$

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{m}\neq\mathbf{n}} J(\mathbf{n}-\mathbf{m})\hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{n}}\hat{\mu}_{\mathbf{m}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{m}},$$

і $\hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}$, $\hat{\mu}_{\mathbf{n}}$ - оператори спінових збуджень. Такі оператори можуть бути уведені по методу Голдстейна_Примакова. А саме, якщо атом має спін S, то

$$\hat{S}_{\mathbf{n}} = \hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\sqrt{2S - \hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{n}}}, \quad \hat{S}_{\mathbf{n}}^{+} = \sqrt{2S - \hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{n}}}\,\hat{\mu}_{\mathbf{n}}, \quad \hat{S}_{\mathbf{n}}^{z} = S - \hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{n}}, \tag{3}$$

де $\hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}$, $\hat{\mu}_{\mathbf{n}}$ - оператори народження та знищення збудження на $\mathbf{n}$ - му вузлі кристалічної ґратки. При цьому під спіновим збудженням атома ми будемо розуміти зменшення на одиницю проекції спіну уздовж магнітного поля. Перестановочні співвідношення для операторів спінів задовольняються, якщо оператори $\hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}$, $\hat{\mu}_{\mathbf{n}}$ задовольняють бозівським комутаційним співвідношенням

$$\left[\hat{\mu}_{\mathbf{n}}, \hat{\mu}_{\mathbf{m}}^{+}\right] = \delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}}. \tag{4}$$

Нагадаємо, що оператори під знаком кореня слід розуміти в сенсі розкладення відповідного кореня в (3) в нескінченний ряд за операторами $\hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{n}}$

$$\hat{S}_{\mathbf{n}} = \sqrt{2S}\left(\hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+} - \frac{1}{4S}\hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{n}} + \ldots\right).$$

У наближенні малого числа збуджень $\left\langle \hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{n}} \right\rangle \ll S$ оператор $\hat{H}_{\text{int}}$ (20) можна розглядати як збурення. Тоді в нульовому наближенні енергетичний спектр спінових збуджень визначається оператором

$$\Delta\hat{H} = \hat{H} - E_0 = \left[\mu B + L(0)\right]\sum_{\mathbf{n}}\hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{n}} - S\sum_{\mathbf{n}\neq\mathbf{m}} J\left(\mathbf{n}-\mathbf{m}\right)\hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{m}}. \tag{5}$$

Діагоналізація оператора (22) здійснюється канонічним перетворенням до операторів народження та знищення $\hat{\mu}_{\mathbf{k}}^{+}, \hat{\mu}_{\mathbf{k}}$ елементарних спінових збуджень – **магнонів**, що характеризуються певним значенням квазіімпульсу $\hbar\mathbf{k}$. Якщо кристал містить N елементарних комірок, то це перетворення має вигляд:

$$\hat{\mu}_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}}\hat{\mu}_{\mathbf{k}} \exp\left(i\mathbf{k}\mathbf{n}\right). \tag{6}$$

Підставляючи цей вираз до (22), здобудемо

$$\Delta\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} E\left(\mathbf{k}\right)\hat{\mu}_{\mathbf{k}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{k}}, \tag{7}$$

де

$$E(\mathbf{k}) = \mu B + \varepsilon(\mathbf{k}),$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = L(0) - L(\mathbf{k}), \quad L(\mathbf{k}) = S\sum_{\mathbf{n}\neq 0} J(\mathbf{n})\exp(i\mathbf{k}\mathbf{n}).$$

Якщо ν - число найближчих сусідів (6 для простої кубічної ґратки, 8 для об’ємоцентрованої й 12 для гранецентровано) в кубічному кристалі з постійною ґратки a, то

$$L(\mathbf{k}) = SJ\nu\cos ka \tag{8}$$

Отже, в області малих значень $ka \ll 1$ закон дисперсії енергії магнонів можна записати в вигляді:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = L(0) - L(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m^*},$$

де

$$m^* = \frac{\hbar^2}{\nu SJa^2}, \quad m^* \approx 10^4 m_e / T_c,$$

- ефективна маса магнона.

Існує певні аналогія між спіновими хвилями й коливаннями атомів у твердих тілах. Магнони й фонони вносять вклад до теплоємності твердого тіла. У кристалах чистих феромагнітних металів у кожній елементарній комірці є по одному іону. Тому в цих кристалах тільки одна гілка спінових хвиль. При цьому енергія магнонів прямує до нуля при наближенні хвильового вектора до центру зони Бріллюена. Цю гілку називають акустичною гілкою магнонів.

У феромагнітних сплавах ($Fe-Cr$, $Fe-Ni$, $Fe-Ni-Al$ та ін.) в елементарній комірці міститься декілька магнітоактивних іонів. Вони мають і відповідне число гілок спінових хвиль. Одна із них – акустична. Частоти інших хвиль прямують до скінченних границь при збільшенні довжини хвилі, Ці гілки називаються оптичними гілками магнонів.

Взаємодія магнонів із коливаннями ґратки

У нульовому наближенні енергетичний спектр спінових збуджень у кристалі визначається наведеним вище виразом тільки за умови жорсткого закріплення іонів феромагнетика у вузлах ґратки. Якщо ж урахувати можливість їх зміщення із рівноважних положень, то треба розглядати залежність обмінних інтегралів $J(\mathbf{n}-\mathbf{m})$ від зміщень $\vec{\xi}_{\mathbf{n}},\vec{\xi}_{\mathbf{m}}$ іонів.

За малих зміщень іонів із положень рівноваги слід замінити $J(\mathbf{n}-\mathbf{m})$ в наведених вище гамільтоніанах розкладенням:

$$J(\mathbf{n}-\mathbf{m})+\left(\vec{\xi}_{\mathbf{n}}-\vec{\xi}_{\mathbf{m}}\right)\mathbf{D}_{\mathbf{nm}}+\ldots, \tag{9}$$

де

$$\mathbf{D}_{\mathbf{nm}} \equiv \left(\frac{\partial J(\mathbf{n}-\mathbf{m})}{\partial\left(\vec{\xi}_{\mathbf{n}}-\vec{\xi}_{\mathbf{m}}\right)}\right)_0 .$$

Потім, у відповідності до матеріалів раніше прочитаних лекцій, у формулі (9) необхідно замінити зміщення $\vec{\xi}_{\mathbf{n}},\vec{\xi}_{\mathbf{m}}$ операторами зміщень $\hat{\vec{\xi}}_{\mathbf{n}},\hat{\vec{\xi}}_{\mathbf{m}}$, $\vec{\xi}_{\mathbf{n}},\vec{\xi}_{\mathbf{m}} \Rightarrow \hat{\vec{\xi}}_{\mathbf{n}},\hat{\vec{\xi}}_{\mathbf{m}}$ і згадати, що оператори зміщень виражаються через оператори породження та знищення фононів $\hat{b}_{\mathbf{k}},\hat{b}_{\mathbf{k}}^{+}$:

$$\hat{\vec{\xi}}_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2mN\Omega(\mathbf{k})}}\mathbf{e}(\mathbf{k})\left(\hat{b}_{\mathbf{k}}+\hat{b}_{-\mathbf{k}}^{+}\right).$$

(тут $\Omega(\mathbf{k})$ - частота певної гілки фононів).

Якщо провести таку заміну, то легко помітити, що вона приводить, по суті, до появи в гамільтоніані (1) нового доданку $\hat{H}_{sp,vib}$,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}} + \hat{H}_{sp,vib}, \tag{10}$$

де

$$\hat{H}_{sp,vib} = -S\sum_{\mathbf{nm}}\left(\hat{\vec{\xi}}_{\mathbf{n}} - \hat{\vec{\xi}}_{\mathbf{m}}\right)\mathbf{D}_{\mathbf{nm}}\hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{m}}.$$

Переходячи далі в цьому виразі до операторів народження й знищення магнонів (див. (6)),

$$\hat{\mu}_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}}\hat{\mu}_{\mathbf{k}}\exp(i\mathbf{kn})$$

і використовуючи наведений вище вираз для операторів зміщення в термінах породження та знищення фононів $\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}}^{+}$ здобудемо оператор взаємодії за участі двох магнонів та одного фонона:

$$\hat{H}_{sp,vib} = -\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{g}}\left[D(\mathbf{k}-\mathbf{q}) - D(\mathbf{k})\right]\left(\hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{-\mathbf{k}}^{+}\right)\hat{\mu}_{\mathbf{k}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}+\mathbf{g}}, \tag{11}$$

$$D(\mathbf{k}) = S\sum_{\mathbf{n},\mathbf{m}}\sqrt{\frac{\hbar}{2mN\Omega(\mathbf{k})}}\mathbf{D}_{\mathbf{nm}}\mathbf{e}(\mathbf{k})\exp\left[\mathbf{k}(\mathbf{m}-\mathbf{n})\right].$$

Цей оператор описує процеси випромінювання й поглинання магнона фононом. Процес випромінювання фонона можна розглядати як черенковське випромінювання звукових хвиль магноном. Умова такого випромінювання зводиться до вимоги, щоби швидкість магнона перевищувала швидкість c_{ac}. Розглядаючи магнон як квазічастинку з виписаною раніше ефективною масою m^{*}, умову випромінювання фонона можна записати у вигляді:

$$\hbar k > m^{*}c_{ac}.$$

Взаємодія між магнонами

Магнони відповідають власним значенням гамільтоніану (5). Цей гамільтоні отриманий із гамільтоніану Гайзенберга в результаті двох наближень: а) за враховування у нескінченних рядах представлень спінових операторів через оператори спінових збуджень тільки перших доданків; б) при знехтуванні оператором $\hat{H}_{\text{int}}$ у (2). При відмові від цих наближень магнони вже не будуть незалежними збудженнями. Між ними з’явиться взаємодія. Цю взаємодію прийнято поділяти на дві частини: а) динамічну взаємодію, зумовлену (2); б) кінематичну взаємодію, зумовлену урахуванням наступних членів за першим у розкладеннях операторів (3) в ряд за $\hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{n}}$.

Розглянемо спершу оператор динамічної взаємодії. Проводячи в (2) перетворення до операторів колективних мод – магнонів, здобудемо:

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\frac{1}{2NS}\sum L(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\hat{\mu}^{+}_{\mathbf{k}}\hat{\mu}_{\mathbf{k}'}\hat{\mu}^{+}_{\mathbf{q}}\hat{\mu}_{\mathbf{q}'}, \qquad (12)$$

де як і перш

$$L(\mathbf{k}) = S\sum_{\mathbf{n}\neq 0} J(\mathbf{n})\exp(i\mathbf{kn})$$

А сумування відбувається за всіма $\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}'$ при умові виконання рівності

$$\mathbf{k}-\mathbf{k}'+\mathbf{q}-\mathbf{q}'=\mathbf{g}$$

де $\mathbf{g}$ - довільний вектор оберненої ґратки. Оператор четвертого порядку за магнонними операторами описує розсіювання магнонів один на одному.

Щоби отримати оператор кінематичної взаємодії магнонів, необхідно у вихідному гамільтоніані спінових взаємодій врахувати члени наступного порядку в розкладенні спінових операторів за операторами спінових збуджень. Після виконання необхідних викладок із переходом до операторів народження й знищення магнонів отримаємо

$$\hat{H}^{'}_{\text{int}} = \frac{1}{4NS}\sum L(\mathbf{k})\left(\hat{\mu}^{+}_{\mathbf{k}}\hat{\mu}^{+}_{\mathbf{k}'}\hat{\mu}_{\mathbf{q}}\hat{\mu}_{\mathbf{q}'} + \hat{\mu}_{\mathbf{q}}\hat{\mu}_{\mathbf{q}'}\hat{\mu}^{+}_{\mathbf{k}}\hat{\mu}^{+}_{\mathbf{k}'}\right),$$

де підсумовування ведеться за всіма значеннями $\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}'$, які лежать у першій зоні Бріллюена й задовольняють умовам

$$\mathbf{k}+\mathbf{k}'=\mathbf{q}+\mathbf{q}'+\mathbf{g},$$

де $\mathbf{g}$ - знову ж таки довільний вектор оберненої ґратки.

Теплоємність газу магнонів.

Взаємодія магнонів між собою і з фононами коливань ґратки приводить до зміни їх числа і до встановлення термодинамічної рівноваги. Як уже зазначалось, за малих густин магнонів їх можна розглядати як бозе-частинки з відповідним законом комутації. Оскільки число магнонів не зберігається, їх хімічний потенціал дорівнює нулю і середнє значення числа магнонів із хвильовим вектором $\mathbf{k}$ й енергією $E(\mathbf{k})$ при температурі $\Theta = k_B T$ визначається так же, як і число фононів, формулою

$$\left\langle N_{\mathbf{k}}\right\rangle \equiv \left\langle \hat{\mu}^{+}_{\mathbf{k}}\hat{\mu}_{\mathbf{k}}\right\rangle = \left(\exp\frac{E(\mathbf{k})}{\Theta}-1\right)^{-1}. \qquad (13)$$

За відсутності зовнішнього магнітного поля

$$E(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m^*}.$$

Середня енергія магнонів у кристалі з одним іоном в елементарній комірці дорівнює:

$$\langle E \rangle = E_0 + \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) \langle N_{\mathbf{k}} \rangle. \tag{14}$$

Якщо в кристалі N елементарних комірок об'ємом v, то, переходячи в цій формулі від сумування до інтегрування, отримаємо

$$\langle E \rangle = E_0 + \frac{vN\left(2m^*\Theta\right)^{5/2}}{4\pi^2 m^* \hbar^3} \int_0^{x_0} \frac{x^4 dx}{e^{x^2} - 1}, \tag{15}$$

де

$$x_0 = \frac{\hbar k_{\max}}{\sqrt{2m^*\Theta}}.$$

За низьких температур, коли $x_0 \gg 1$, верхню границю інтеграла можна замінити на нескінченність. Тоді, враховуючи, що

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{e^{x^2} - 1} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \zeta(5/2)$$

де $\zeta(x)$ - дзета-функція Рімана, $\zeta(5/2) \approx 1{,}341$, маємо

$$\langle E \rangle = E_0 + AV\Theta^{5/2}, \quad x_0 \gg 1, \tag{16}$$

де

$$A = \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\frac{m^*}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2}.$$

Отже, питома теплоємність магнонного газу за низьких температур визначається законом

$$C_v = a_{mag} \Theta^{3/2}, \quad a_{mag} = \frac{5}{2} A k_B. \tag{17}$$

Нагадаємо, що теплоємність фононного газу за низьких температур пропорційна кубу температури

$$C_v = a_{ph}\Theta^3, \quad a_{ph} = \frac{2\pi^2 k_B}{5\left(\hbar \bar{V}\right)^3}, \quad 3\bar{V}^{-3} = \sum_{\alpha} V_a^{-3},$$

де V_α - швидкість звуку відповідної гілки коливань.Ця обставина дозволяє виділити теплоємність магнонного газу із загальної теплоємності твердого тіла. Справді, якщо

$$C_v = a_{ph}\Theta^3 + a_{mag}\Theta^{3/2}, \tag{18}$$

то графік залежності функції

$$\Theta^{-3/2} C_v = a_{ph}\Theta^{3/2} + a_{mag}$$

від $\Theta^{3/2}$ буде прямою лінією. Нахил цієї лінії визначає величину a_{ph}, а точка перетину з віссю ординат визначає величину a_{mag}. Знаючи цю величину, можна обчислити ефективну масу магнона.

Наявність магнонів у кристалі зменшує магнітний момент $M_0 = \mu_0 SN$ його основного стану. Середній магнітний момент уздовж осі намагнічення кристалу визначається виразом:

$$\left\langle \hat{M}_z \right\rangle = \mu_0 \sum_{n=1}^{N} \left\langle \hat{S}_n^z \right\rangle,$$

де μ_0 - магнетон Бора. Підставляючи $\hat{S}_{\mathbf{n}}^z = S - \hat{\mu}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{\mu}_{\mathbf{n}}$ і використовуючи перетворення $\hat{\mu}_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mu}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{kn})$ й формулу (13), маємо:

$$\left\langle \hat{M}_z \right\rangle = M_0 \left(1 - \xi\right), \tag{19}$$

де

$$M_0 = \mu_0 SN,$$

$$\xi = \frac{v\left(2m^*\Theta\right)^{3/2}}{2\pi^2 S\hbar^3} \int_0^{x_0} \frac{x^2 dx}{e^{x^2} - 1} = \frac{v}{2\pi^2 S} \left(\frac{2m^*\Theta}{\hbar^2}\right)^{3/2} \zeta\left(3/2\right), \quad x_0 \gg 1, \quad \zeta\left(3/2\right) \approx 2{,}612.$$

Таким чином, за низьких температур магнітний момент кристалу зменшується при зростанні температури пропорційно $\Theta^{3/2}$ - закон трьох других Блоха.

Звернемо окрему й особливу увагу на ту обставину, що ми визначили таку залежність «на кінчику пера», не звертаючись до даних експериментальних досліджень.