

## Лекція 8

### Вігнерівська кристалізація у формалізмі фермі-рідинного підходу Ландау - Сіліна.

#### Вступ до поняття вігнерівської кристалізації.

У цій лекції розглянемо ще один приклад фазового переходу, що допускає опис у наближенні середнього поля. Опис просторово-періодичних структур, що виникають у сильно взаємодіючих системах багатьох частинок у методиці самоузгодженого поля (або підході середнього поля), вперше було запропоновано Власовим [1]. Фактично, у цій роботі була спроба побудови класичної (не квантової!) теорії кристала, оскільки в ній всі розгляди ґрунтувалися на знаходженні просторово-періодичних розв'язків рівняння для самоузгодженого потенціалу взаємодії з використанням рівноважного розподілу Больцмана для частинок системи. Критиці такого підходу, що повністю ігнорує, по суті, квантово-механічну природу явища кристалізації, присвячено чимало робіт, і з цієї причини ми не зупинятимемося на цьому. Тим більше, що в даній лекції йтиметься зовсім не про власівську кристалізацію. Зауважимо лише, що отримані Власовим умови існування просторово-періодичних структур передбачають переважання сил притягання між частинками системи над силами відштовхування, що має виконуватися для звичайних кристалів.

Кристалічні структури можуть виникати й у тому випадку, коли між сусідніми частинками (або квазічастинками), що утворюють таку періодичну структуру, діють сили відштовхування, а не притягування. Однак при цьому необхідне існування будь-яких зовнішніх по відношенню до даної системи дій, що компенсують сили відштовхування. Можливість існування таких структур була проілюстрована ще в 1934 Вігнером [2] на прикладі кристалізації тривимірного електронного газу, що знаходиться в полі просторово-однорідного позитивного заряду. Цей позитивний заряд і грав роль вищезгаданого фактора, що компенсує сили відштовхування між

негативно зарядженими електронами. Слід зазначити, що поки що не вдалося створити експериментальні умови для спостереження цього ефекту (йдеться лише про тривимірну вігнерову кристалізацію). Але, мабуть, причиною цієї обставини є не принципова неможливість існування явища тривимірної вігнерівської кристалізації, а неможливість її експериментального спостереження через слабкість проявів її ефектів на тлі інших.

У даній лекції ми використовуємо для опису фазового переходу, пов'язаного з явищем вігнерівської кристалізації, методи теорії самоузгодженого поля, а саме теорії фермі-рідини Ландау-Сіліна. Тому ознайомимося спочатку з положеннями цієї теорії.

### **Основні засади теорії фермі-рідини Ландау - Сіліна.**

Під нормальною фермі-рідиною традиційно розуміється вироджена фермі-рідина (заряджена або нейтральна), що має при квазічастинковому описі основні властивості фермионів, що не взаємодіють. Таке визначення нормальної фермі-рідини має на увазі, що стан її рівноваги є найбільш симетричним. Іншими словами, функція розподілу, що описує цей стан, інваріантна по відношенню до просторових трансляцій та поворотів в імпульсному та спіновому просторах. Незважаючи на природні відмінності в поведінці заряджених і нейтральних фермі-рідин, основоположні принципи теорії нормальної фермі-рідини Ландау-Сіліна, що вивчає низьколежачі збудження на тлі рівноважного стану, дозволяють при описі ряду явищ у системах взаємодіючих ферміонів на певних умовах нехтувати питаннями наявності зарядів у структурних одиницях. Перш ніж викладати основні положення теорії нормальної фермі-рідини, нагадаємо, що функція розподілу  $f(\mathbf{p})$  ідеального фермі-газу частинок має вигляд:

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{\{\exp \beta [\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu] + 1\}}, \quad \sum_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}) = N, \quad \beta^{-1} \equiv T,$$

$N$  - число ферміонів у системі,  $T$  - температура. У разі фермі-рідини структурними одиницями є квазічастинки-ферміони із законом дисперсії  $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  і функцією розподілу  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\{\exp \beta [\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \mu] + 1\}}.$$

Число квазічастинок у системі має співпадати з числом частинок-ферміонів, які сильно взаємодіють між собою

$$\int d\mathbf{x} \sum_{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = N.$$

Окрім головної умови застосування теорії нормальної фермі-рідини - малості температури в порівнянні з енергією Фермі  $\varepsilon_F$

$$\frac{T}{\varepsilon_F} \ll 1$$

найважливішим постулатом теорії (як для нейтральної, так і для зарядженої фермі-рідини) є положення про функціональну залежність енергії квазічастинки  $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  від функції розподілу  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ :

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \varepsilon_p + \frac{2}{V} \int d\mathbf{x}' \sum_{\mathbf{p}'} F(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; \mathbf{p}, \mathbf{p}') f(\mathbf{x}', \mathbf{p}'),$$

де враховано, що спин електрона дорівнює  $1/2$ , отже,  $2S + 1 = 2$ , звідки й двійка у формулі. У цій формулі  $\varepsilon_p = \mathbf{p}^2 / 2m$  - енергія вільного ферміону,  $F(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; \mathbf{p}, \mathbf{p}')$  - так звана амплітуда Ландау, що характеризує парну взаємодію квазічастинок. Таким чином, видно, що вираз для функції розподілу квазічастинок є, по суті, складним трансцендентним рівнянням, що пов'язує функцію розподілу з Ландау амплітудою й енергією невзаємодіючих ферміонів. Амплітуда Ландау теоретично не визначається, її характеристики повинні знаходитись із експериментів.

Нагадаємо також, що **Енергія Фермі** — [енергія](#) найвищого заповненого одночастинкового стану в системі [ферміонів](#) при [температурі абсолютного нуля](#). Для електронного газу

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{2/3}$$

Необхідно відзначити, що термін «енергія Фермі» досить часто помилково вживається в значенні [«хімічний потенціал»](#). Значення хімічного потенціалу для системи ферміонів збігається з енергією Фермі тільки при температурі абсолютного нуля, проте відрізняються при вищих температурах.

Важливим моментом теорії є визначення умов стійкості рівноважного стану фермі-рідини. Це завдання у просторово-однорідному випадку вперше було розв'язане Померанчуком, який сформулював критерії стійкості нормального стану аж до температури  $T = 0$ :

$$1 + \frac{\nu(\mu) F_l}{2l + 1} > 0,$$

де  $F_l$  - коефіцієнт у розкладанні просторово-однорідної амплітуди Ландау

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \int d\mathbf{x}' F(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; \mathbf{p}, \mathbf{p}')$$

поблизу поверхні Фермі ( $p \sim p' \sim p_F$ ) у ряд за поліномами Лежандра  $P_l(\cos \vartheta)$

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \Big|_{p \sim p' \sim p_F} = \sum_{l=0}^{\infty} F_l P_l(\cos \vartheta),$$

де  $\vartheta$  - кут між імпульсами  $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$  на поверхні Фермі. Величина  $\nu(\varepsilon)$  є щільністю енергетичних станів і визначається виразом

$$\nu(\varepsilon) \equiv \frac{2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{p})),$$

причому використовується при обчислення система одиниць, де  $\hbar=1$ , в кінцевих формулах розмірність може бути відновлена без особливих труднощів.

Необхідно зазначити при цьому наступну обставину. Критерії Померанчука отримані для температури, що дорівнює нулю. Але, взагалі кажучи, не можна стверджувати, що при порушенні цих умов рівноважний стан фермі-рідини явно нестійкий за будь-якої температури. Навпаки, можна показати, що навіть за порушення критерію Померанчука стан статистичної рівноваги нормальної фермі-рідини залишається стійким до певної температури  $T_0$  і стає нестійким при нижчих температурах  $T < T_0$ . При цьому, природно, мається на увазі дотримання головної умови застосування фермі-рідинного підходу  $\frac{T}{\varepsilon_F} \ll 1$ ,  $\varepsilon_F \sim \mu$ . Така нестійкість основного стану нижче

за певну температуру вказує на можливість фазових переходів у фермі-рідини, пов'язаних з порушенням критеріїв Померанчука. Одним із таких фазових переходів є вігнерівська кристалізація. Формування такої структури внаслідок фазового переходу пов'язане з порушенням критерію Померанчука на нульовій гармоніці  $F_0$  у розкладанні просторово-однорідної амплітуди Ландау в ряд за поліномами Лежандра,

$$1 + \nu(\mu) F_0 \leq 0.$$

**Перехід, пов'язаний із порушенням трансляційної інваріантності.**

Для опису такого переходу з виникненням просторово-періодичних структур у системі необхідно знайти просторово-періодичні розв'язки рівнянь самоузгодження

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \varepsilon_p + \frac{2}{V} \int d\mathbf{x}' \sum_{\mathbf{p}'} F(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; \mathbf{p}, \mathbf{p}') f(\mathbf{x}', \mathbf{p}'),$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\{\exp \beta [\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \mu] + 1\}}.$$

Розв'язки будемо шукати у вигляді періодичних функцій по  $\mathbf{x}$ :

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{q}} \varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}) = \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{p}),$$

де

$$\varepsilon_0(\mathbf{p}) \equiv \langle \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \rangle, \quad \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x})$$

і дужки  $\langle \dots \rangle$  означають усереднення за періодами (постійними ґратки). Як легко бачити, величина  $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  може вважатися у даному випадку параметром порядку несиметричної фази. Враховуючи таке уявлення, рівняння самоузгодження можна подати у наступному вигляді

$$\varepsilon_0(\mathbf{p}) = \varepsilon_p + \frac{2}{V} \sum_{\mathbf{p}'} F_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \left\langle \frac{1}{\{\exp \beta [\varepsilon_0(\mathbf{p}) + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \mu] + 1\}} \right\rangle, \quad \mathbf{q} = 0,$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \frac{2}{V} \sum_{\mathbf{p}'} F_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \left( \frac{1}{\{\exp \beta [\varepsilon_0(\mathbf{p}) + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \mu] + 1\}} \right)_{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{q} \neq 0,$$

де

$$F_q(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \int d\mathbf{x} F(\mathbf{x}; \mathbf{p}, \mathbf{p}') \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x})$$

- фур'є-компонента амплітуди Ландау. Запис

$$\left( \frac{1}{\left\{ \exp \beta [\varepsilon_0(\mathbf{p}) + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \mu] + 1 \right\}} \right)_q$$

означає, що від виразу в дужках також має бути обчислена фур'є-компонента.

Припустимо далі, що залежність амплітуди  $F_q(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  від напрямків векторів  $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$  визначається лише їх скалярним добтком  $\mathbf{p}\mathbf{p}'$ . У цьому випадку розв'язок  $\tilde{\varepsilon}_q(\mathbf{p})$  можна шукати у вигляді, в якому він не залежить від напрямку імпульсу  $\mathbf{p}$ ,

$$\tilde{\varepsilon}_q(\mathbf{p}) \equiv \tilde{\varepsilon}_q(p).$$

Крім того, якщо припустити, що функція  $F_q(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  повільно змінюється зі зміною імпульсів  $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ , величина  $\tilde{\varepsilon}_q(p)$  також повільно змінюватиметься зі зміною  $p$ . Оскільки, як спеціально зазначалося, теорія фермі-рідини справедлива поблизу поверхні Фермі, ( $p \sim p' \sim p_F$ ), то розв'язок можна також шукати у вигляді

$$\tilde{\varepsilon}_q(p) = \frac{F_q(p, p_F)}{F_q(p_F, p_F)} \tilde{\varepsilon}_q(p_F), \quad F_q(p, p') \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega F_q(\mathbf{p}, \mathbf{p}'),$$

де  $\tilde{\varepsilon}_q(p_F) \equiv \tilde{\varepsilon}_F$  задовольняє рівняння:

$$\tilde{\varepsilon}_F = F_q \left\{ n(\beta, \mu - \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \right\}_q, \quad \mathbf{q} \neq 0, \quad F_q \equiv F_q(p_F, p_F)$$

і введено функцію

$$n(\beta, \mu) \equiv \frac{2}{V} \sum_{\mathbf{p}} \left\{ \exp[\beta(\varepsilon_0(\mathbf{p}) - \mu)] + 1 \right\}^{-1}.$$

Зрозуміло, що і в такому випадку вид здобутих рівнянь самоузгодження досить складний для аналітичного розв'язку. Тому зробимо ще кілька припущень, що спрощують ситуацію. Розглянемо випадок одноперіодичних структур у тривимірній фермі-рідини. Нехай виникає така структура із періодом  $X$  уздовж осі  $x$ :

$$\tilde{\varepsilon}_q(p) = \delta_{q,0} \delta_{q_z,0} \tilde{\varepsilon}_q(p), \quad q = \frac{2\pi n}{X}$$

Якщо шукати також розв'язок отриманих рівнянь узгодження поблизу точки переходу, можна вважати внаслідок цього параметр порядку  $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  (у даному випадку  $\tilde{\varepsilon}_F \equiv \tilde{\varepsilon}_q(p_F)$ ) малим. Щодо виписаних формул це означатиме справедливість нерівності

$$|\mu| \ll |\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{p})|.$$

Унаслідок цього маємо:

$$\left\{ n(\beta, \mu - \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \right\}_q \approx \frac{\partial n(\beta, \mu)}{\partial \mu} \left\{ \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \right\}_q + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 n(\beta, \mu)}{\partial \mu^2} \left\{ \tilde{\varepsilon}^2(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \right\}_q + ,$$



$$+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 n(\beta,\mu)}{\partial\mu^3}\{\tilde{\varepsilon}^3(\mathbf{x},\mathbf{p})\}_{\mathbf{q}}+\dots$$

Залишаючи в цьому розкладанні тільки член першого порядку та враховуючи, що

$$\frac{\partial n(\beta,\mu)}{\partial\mu}\{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x},\mathbf{p})\}_{\mathbf{q}}\approx\frac{\partial n(\beta,\mu)}{\partial\mu}\tilde{\varepsilon}_F$$

прийдемо до рівняння

$$\tilde{\varepsilon}_F=-F_{\mathbf{q}}\frac{\partial n(\beta,\mu)}{\partial\mu}\tilde{\varepsilon}_F.$$

Видно, що останнє рівняння можна задовольнити єдиним способом:

$$1+F_{\mathbf{q}}\frac{\partial n(\beta,\mu)}{\partial\mu}=0.$$

Зрозуміло, що насправді ми отримали рівняння, яке пов'язує вектор зворотної ґратки  $\mathbf{q}$  з температурою  $T=\beta^{-1}$ . Тим самим визначається температура  $T_0$  фазового переходу до стану з просторово-періодичною структурою – вігнерівському кристалу. У низькотемпературному наближенні (по  $T/\mu$ ,  $\mu\approx\varepsilon_F$ , коли функція розподілу  $\{\exp[\beta(\varepsilon_0(\mathbf{p})-\mu)]+1\}^{-1}$  може прийматися за «сходінку», тобто, одиничну функцію) ця температура може бути обчислена (рецепт обчислення таких інтегралів можна знайти в томі 5 Ландау)

$$T_0^2=-\frac{6}{\pi^2}\frac{1+F_{\mathbf{q}}\nu(\mu)}{F_{\mathbf{q}}\nu''(\mu)},\quad\mu\approx\varepsilon_F.$$

Слід зазначити, що це можна зробити лише для таких функцій  $F_q$ , коли величина  $1 + F_q \nu(\mu)$  є малою. Більш того, оскільки  $\nu''(\mu) < 0$  (див. Ландау), то видно, що  $T_0^2 > 0$  тільки за умови

$$1 + F_q \nu(\mu) \leq 1,$$

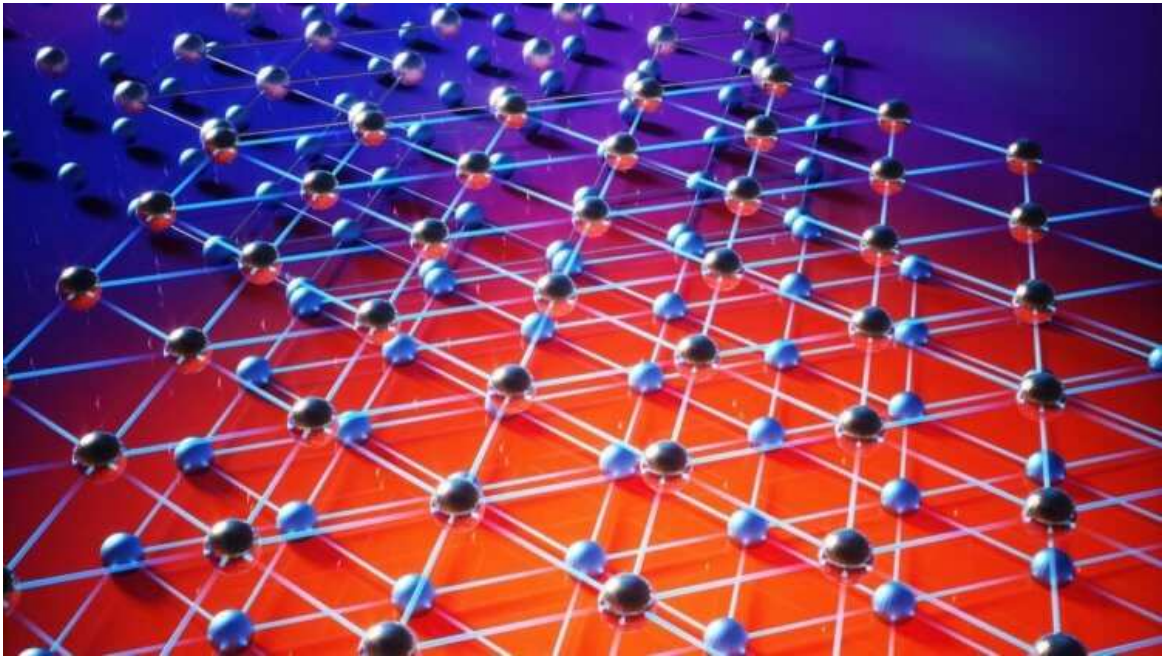
що є якраз випадком, протилежним відповідному критерію Померанчука.

Для визначення ж залежності  $\tilde{\epsilon}_F$  від температури необхідно скористатися наведеним вище розкладанням за параметром порядку аж до кубічних доданків по  $\tilde{\epsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ . В результаті прийдемо до виразу, типового для теорії фазових переходів Ландау

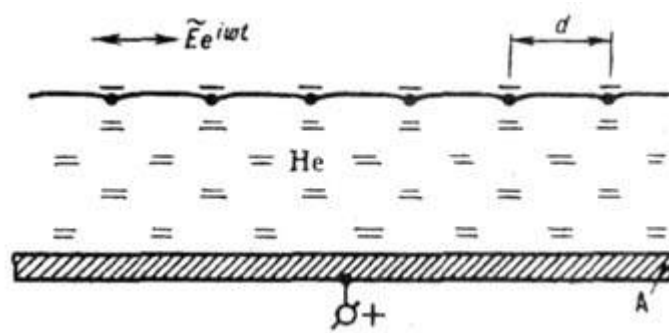
$$\tilde{\epsilon}_F = A(T_0, q) \sqrt{T_0 - T},$$

де величина  $A(T_0, q)$  визначається амплітудою Ландау.

Зазначимо ще раз, що поки що експериментального підтвердження явища вігнерівської кристалізації електронів у тривимірному випадку немає. Правда, нещодавно з'явилася стаття, де стверджується, що таку структуру вдалося сфотографувати. Певну подвійну кристалічну структуру, оскільки існує ще й кристалічна ґратка позитивних іонів. Але цей факт наразі вимагає підтвердження.



Просторово-періодичні стани електронів експериментально реалізовані над поверхнею плівок рідкого гелію над металевими підкладками.



Для опису таких ефектів теорія середнього поля має бути суттєво модифікована.

### Література.

1. А.А. Власов, Теория многих частиц, Гостехиздат, Москва-Ленинград, (1950).
2. E.P. Wigner, Phys. Rev. **40**, 1002 (1934).