Лекція 8(2). Дивись разом із 8(1).

Метод середнього поля в теорії просторово-періодичних структур заряджених частинок над поверхнею рідких діелектриків

Частина II. Фазовий перехід до просторово періодичних структур в теорії систем заряджених частинок над поверхнею рідких діелектриків

3. Розподіл зарядів і полів у випадку плоскої поверхні рідкого діелектрика

При розв’язанні системи рівнянь (2.18) – (2.21) будемо притримуватись методики роботи [10], де така задача розв’язується у випадку розподілу зарядів над плоскою межею масивного твердого діелектрика.

Зробимо попередньо кілька істотних замечаний. Якщо на основі рівняння (2.18) розв’язати задачу про просторовий розподіл зарядів і полів над плоскою межею рідкого діелектрика, то розподіл полів, як у підкладці, так і в самій плівці рідкого діелектрика однозначно визначаються з рівнянь (2.20) – (2.22). Для цього перше з рівняньй (2.18) зручно переписати у вигляді:

$$\frac{\partial^2\overline{\varphi}_1(z)}{\partial z^2} = 4\pi e\nu\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{1/2}\left\{\exp\beta\left(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\psi\right)+1\right\}^{-1}, \qquad \varepsilon_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m}, \quad \beta^{-1}=T\,. \tag{3.1}$$

де введено позначення

$$\psi(z)\equiv\mu+e\overline{\varphi}_1(z)\,,\ \nu\equiv(2m)^{3/2}/2\pi^2\hbar^3\,, \tag{3.2}$$

і враховано, що спін електрона дорівнює $1/2$. Величину ψ зазвичай називають електрохімічним потенціалом.

Зазначимо, що рівняння (3.1) можна звести до диференціального рівняння першого порядку. Помножуючи для цього рівняння (3.1) $(\partial\varphi_1(z)/\partial z)$ і використовуючи тотожну рівність

$$\left(\frac{\partial\overline{\varphi}_1}{\partial z}\right)\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\psi)}+1} = -\frac{1}{\beta Q}\frac{\partial}{\partial z}\ln\left[e^{-\beta(\varepsilon-\psi)}+1\right],$$

після нескладних викладок прийдемо до наступного звичайного диференціального рівняння першого порядку:

$$\left(\frac{\partial\overline{\varphi}_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{16\pi}{3}\nu\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{3/2}\left\{\exp\beta\left(\varepsilon-\psi\right)+1\right\}^{-1}+C_1\,, \tag{3.3}$$

де C_1 - деяка довільна стала інтегрування. Таким чином, виникає потреба розв’язати рівняння

$$\frac{\partial\overline{\varphi}_1}{\partial z}=\pm\left\{\frac{16\pi}{3}\nu\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{3/2}\left\{\exp\beta\left(\varepsilon-\psi\right)+1\right\}^{-1}+C_1\right\}^{1/2}.$$

Знак перед коренем у цьому рівнянні має вибиратися з таких міркувань. Сила, що діє на заряди при $z>\overline{\xi}$, повинна бути притискаючою ці заряди до поверхні діелектрика. Тому у разі позитивних зарядів над діелектриком знак перед коренем в останній формулі вибирається позитивним, у разі негативних зарядів негативним. Далі у всіх викладках для визначеності вважатимемо, що у цій роботі вивчається розподіл негативних зарядів над поверхнею діелектрика, $Q=-\left|Q\right|$, а отже, потенціал φ_1 задовольняє рівняння

$$\frac{\partial\overline{\varphi}_1}{\partial z}=-\left\{\frac{16\pi}{3}\nu\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{3/2}\left\{\exp\beta\left(\varepsilon-\psi\right)+1\right\}^{-1}+C_1\right\}^{1/2}. \quad (3.4)$$

У моделі Томаса-Фермі у її традиційному розумінні вважається, що газ частинок є виродженим [9]. Як показано в роботі [10], у загальному випадку, залежно від температури, щільності частинок і зовнішнього притискаючого поля, газ електронів може бути вироджений поблизу поверхні діелектрика і невироджений на значній відстані від цієї поверхні. Однак, якщо параметри системи такі, що газ електронів є невиродженим поблизу поверхні діелектрика, він невироджений і в усьому просторі над діелектриком. У цій роботі ми вважатимемо газ невиродженим. У цьому випадку функція розподілу електронів має бути близькою до больцманівської функції розподілу.

$$\left\{\exp\beta\left(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\psi\right)+1\right\}^{-1}\sim\exp\beta\left(\psi-\varepsilon_{\mathbf{p}}\right)\ll 1, \quad (3.5)$$

відповідно до чого вираз для густини розподілу газу по координаті (див. (2.18)) набуде вигляду:

$$n(z)\approx\frac{\sqrt{\pi}}{2}\nu\beta^{-3/2}\exp(\beta\psi). \quad (3.6)$$

У цьому полягає один з моментів модифікації моделі Томаса-Фермі стосовно досліджуваної системи. Критерій невиродженості електронного газу в термінах характерних величин досліджуваної системи буде наведено нижче. У разі невиродженого електронного газу над плоскою поверхнею рідкого діелектрика рівняння (3.4) у разі справедливості умов (3.5) має аналітичний розв'язок (докладніше див [10]):

$$\frac{\sqrt{(B/C_1)\mathrm{e}^{\beta\psi}+1}-1}{\sqrt{(B/C_1)\mathrm{e}^{\beta\psi}+1}+1}=C_2 e^{-e\sqrt{C_1}/T}, \qquad B\equiv 4\pi^{3/2}\nu\beta^{-5/2}. \tag{3.7}$$

Константи інтегрування C_1 та C_2 у виразі (3.7) визначаються з наступних умов. Необхідно вимагати, щоб відсутність зарядів над плівкою рідкого діелектрика напруженість електричного поля в області «1» дорівнювала напруженості зовнішнього притягуючого електричного поля E. Потрібно також, щоб інтеграл за імпульсами та координатами від функції розподілу $f_{\mathbf{p}}(z)$ в області «1» дорівнював повному числу частинок над поверхнею плівки рідкого діелектрика. Насправді така рівність має бути наближеною, оскільки певна частка зарядів пов'язана з просторово періодичною структурою поверхні рідкого діелектрика. Проте, відповідно (1.11), (2.7) – (2.11) ми вважаємо, що кількість таких частинок мало порівняно із загальним числом зарядів над поверхнею плівки рідкого діелектрика. Зробивши необхідні викладки, отримаємо:

$$C_1=E^2, \qquad C_2=\frac{2\pi e n_s}{E+2\pi e n_s}. \tag{3.8}$$

Розв’язок (3.7) дозволяє визначити залежність напруженості електричного поля $E_1(z)=-\frac{\partial\bar{\varphi}_1(z)}{\partial z}$ від координати z над поверхнею рідкого діелектрика $z=\bar{\xi}$

$$E_1(z)=E\frac{1+\chi(z)}{1-\chi(z)} \tag{3.9}$$

і розподіл густини електронів $n(z)$:

$$n(z)=\beta\frac{E^2}{8\pi}\frac{4\chi(z)}{(1-\chi(z))^2}, \tag{3.10}$$

де функція $\chi(z)$ дається виразами:

$$\chi(z)\equiv\frac{E_0-E}{E_0+E}\exp\left\{-(z-\bar{\xi})/z_0\right\}, \qquad z_0\equiv(\beta e E)^{-1}, \qquad \beta^{-1}=T. \tag{3.11}$$

Величина E_0, що входить в (3.11), є напруженістю сумарного електричного поля на поверхні рідкого діелектрика з плоским профілем $z=\bar{\xi}$,

$$E_0=-\left(\frac{\partial\bar{\varphi}_1(z)}{\partial z}\right)_{z=\bar{\xi}} \tag{3.12}$$

та за допомогою формули

$$E_0 - E = 4\pi e n_s, \tag{3.13}$$

пов'язана з напруженістю зовнішнього поля E та числом об'ємних зарядів n_s, що припадають на одиницю площі плоскої поверхні діелектрика,

$$n_s = \int_{\xi}^{\infty} dz n(z), \tag{3.14}$$

Звернімо увагу, що при $z \to \infty$ $E_1 \to E$, як це випливає з формул (3.9), (3.11). З огляду на цю обставину справедлива формула:

$$E_0^2 - E^2 = \frac{16\pi}{3} \nu \exp\left(\beta\psi\right) \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{3/2} \exp\left(\beta\varepsilon\right), \tag{3.15}$$

що отримується з (3.4) з урахуванням (3.5), (3.12). Зазначимо, що для рівноважної системи зарядів над діелектриком величина n_s не залежить ні від координат, ні від розподілу полів і визначається лише загальним числом N зарядів над діелектриком Нагадаємо, що нами число зарядів вважається заданим спочатку, завдяки чому система не обов'язково квазінейтральна, див. Звернемо увагу також на те, що величина n_s характеризує напруженість додаткового (стосовно E) поля, що притискає заряди до поверхні діелектрика Причому це поле породжується самими цими зарядами. Як легко переконатися, при великих z, $z \gg z_0$ (см. (3.11)), розподіл зарядів над поверхнею діелектрика близький до больцманівського розподілу, а напруженість електричного поля експоненційно прагне напруженості зовнішнього притискаючого електричного поля.

Потенціали сумарного електричного поля та зовнішнього електричного поля у плівці рідкого діелектрика та твердій підкладці відповідно до формул (2.20) – (2.22), (3.9), (3.11) – (3.14) визначаються виразами:

$$\bar{\varphi}_2(z) = -\frac{E_0}{\varepsilon}\left(z - \bar{\xi}\right) + \varphi_0, \quad \bar{\varphi}_3(z) = -\frac{E_0}{\varepsilon_d}\left(z + d\right) + \frac{E_0}{\varepsilon}\left(d + \bar{\xi}\right) + \varphi_0, \tag{3.16}$$

$$\bar{\varphi}_1^{(e)}(z) = -E\left(z - \bar{\xi}\right) + \varphi_0^{(e)}, \qquad \bar{\varphi}_2^{(e)}(z) = -\frac{E}{\varepsilon}\left(z - \bar{\xi}\right) + \varphi_0^{(e)},$$

$$\bar{\varphi}_3^{(e)}(z) = -\frac{E}{\varepsilon_d}\left(z + d\right) + \frac{E}{\varepsilon}\left(d + \bar{\xi}\right) + \varphi_0^{(e)},$$

де введено позначення $\bar{\varphi}_{1\xi} = \bar{\varphi}_{2\xi} \equiv \varphi_0$, $\bar{\varphi}_{1\xi}^{(e)} = \bar{\varphi}_{2\xi}^{(e)} \equiv \varphi_0^{(e)}$.

На основі отриманих формул (3.9), (3.11) – (3.16) визначається і зниження рівня поверхні $\bar{\xi}$ у термінах параметрів задачі виходячи з формули (2.19) з урахуванням нерівності (3.5):

$$\bar{\xi} = -\frac{\varepsilon+1}{8\pi\varepsilon\alpha\kappa^2}\left(E_0^2 - E^2\right). \tag{3.17}$$

При отриманні цього виразу необхідно (2.19) перетворити доданок з логарифмом. Для цього треба підставити в цей доданок явний вираз для незбуреної функції розподілу з урахуванням (3.2) та скористатися формулою (3.15). Зазначимо, що відсутність зарядів відповідно до (3.13) величина , як і повинно бути, дорівнює нулю.

У термінах введених вище величин може бути сформульований і критерій невиродженого електронного газу над поверхнею плівки рідкого діелектрика:

$$\nu^{-1}T^{-5/2}en_s\left(E+2\pi en_s\right) \ll 1. \tag{3.18}$$

Видно, що ця нерівність порушується у разі низьких температур та сильних зовнішніх притискаючих полів (див. у зв'язку з цим [10]).

Виходячи з формули (3.9), неважко отримати вираз для самоузгодженого потенціалу, відповідального за розподіл зарядів і полів над поверхнею рідкого діелектрика:

$$\bar{\varphi}_1(z) = \varphi_0 - E\left(z-\bar{\xi}\right) - 2Ez_0\ln\frac{1-\chi(z)}{1-\chi(\bar{\xi})}, \tag{3.19}$$

де величини $\chi(z)$, z_0 визначаються формулами (3.11). Нагадаємо, що нами вважається, що над поверхнею плівки рідкого діелектрика розташовані негативно заряджені частинки - електрони. З цієї причини напрямок притягуючого поля має збігатися з напрямком осі координат $0z$.

Вирази (3.9) – (3.11) допускають граничний перехід $E \to 0$. У разі відсутності зовнішнього притискаючого поля ці рішення набувають вигляду:

$$E_1(z) \underset{E\to 0}{\longrightarrow} E_0\left\{1+\frac{z-\bar{\xi}}{2z_0}\right\}^{-1}, \qquad n(z) \underset{E\to 0}{\longrightarrow} \beta\frac{E_0^2}{8\pi}\left\{1+\frac{z-\bar{\xi}}{2z_0}\right\}^{-2}, \tag{3.20}$$

де (пор. з (3.11))

$$z_0 \equiv (\beta eE_0)^{-1}, \qquad E_0 = 4\pi en_s, \tag{3.21}$$

а величина $\bar{\xi}$ може бути знайдена з (2.19) або (3.17):

$$\bar{\xi} = -\frac{\varepsilon+1}{8\pi\varepsilon\alpha\kappa^2}E_0^2. \tag{3.22}$$

Як легко побачити, порівнюючи між собою вирази (3.9), (3.10) і (3.20), у разі відсутності зовнішнього притискаючого поля експоненційний характер спадання електричного поля та щільності зарядів над поверхнею діелектрика змінюється більш слабким статечним спаданням. Самоузгоджений потенціал, відповідальний за розподіл зарядів і полів над поверхнею рідкого діелектрика, у цьому випадку визначається виразом (пор. з (3.19)):

$$\bar{\varphi}_1(z) = \varphi_0 - 2E_0 z_0 \ln\left(1 + \frac{z - \bar{\xi}}{2z_0}\right), \tag{3.23}$$

в якому величини E_0, z_0 даються формулами (3.21). Зазначимо також, що нерівність (3.14) у цьому випадку набуває вигляду:

$$\left(en_s\right)^2 \nu^{-1}\beta^{5/2} \ll 1 \tag{3.24}$$

і залишається справедливим в області відносно високих температур та малого числа зарядів в обсязі над одиничною площею поверхні, див. (3.14). Формули (3.16) залишаються справедливими і в цьому випадку необхідно тільки в них покласти $E_0 = 4\pi e n_s$ і $E = 0$.

Зазначимо тут також таку обставину. Вище зазначалося, що аналізована нами система не передбачалася квазинейтральной. Умова квазінейтральності для системи, що розглядається, означає, що число зарядів визначається напруженістю зовнішнього притягуючого електричного поля E, а саме:

$$E = 4\pi e n_s, \tag{3.25}$$

де число зарядів n_s, що припадає на одиницю площі плоскої поверхні рідкого діелектрика, дається формулою (3.14). Іншими словами, в системі може утримуватися тільки така кількість зарядів, яка потрібна для нейтралізації дії зовнішнього притягуючого електричного поля, див., наприклад, [3, 4]. У цьому випадку розподіл зарядів і полів над поверхнею рідкого діелектрика також дається формулами (3.20) – (3.21), які, однак, замість величини E_0 треба підставити напруженість зовнішнього притягуючого електричного поля E (див. (3.25)).

Отримані вирази (3.9) – (3.25) і є розв’язком задачі про розподіл полів та невиродженого газу електронів у системі заряджених частинок над плоскою поверхнею рідкого діелектрика у присутності зовнішнього притискаючого поля або відсутність останнього. Звернемо увагу на те, що у цих виразах діелектрична проникність ε рідкого діелектрика присутня тільки у формулах (3.17), (3.22) для величини $\bar{\xi}$, що характеризує зниження рівня плоскої поверхні під впливом тиску, створюваного зарядами над цією поверхнею, зокрема і з допомогою зовнішнього притягує електричного поля. Причиною цього є однорідність задачі вздовж поверхні, за координатою $\boldsymbol{\rho}$. У разі наявності неоднорідностей по $\boldsymbol{\rho}$ розв’язки рівнянь істотно залежатимуть від виду діелектрика, тобто від його діелектричної проникності ε. і неоднорідності можуть бути пов'язані з як з неоднорідностями самої поверхні, так і з неоднорідним розподілом на ній заряду (або того й іншого одночасно див. у зв'язку з цим [10]). У наступному розділі буде розглянуто випадок просторово періодичних неоднорідностей поверхні плівки рідкого діелектрика, що виникли в результаті фазового переходу.

4. Критичні параметри фазового переходу системи до просторово періодичного профілю поверхні рідкого діелектрика

Вихідними рівняннями для дослідження критичних параметрів такого фазового переходу будуть рівняння (2.24), (2.25) та граничні умови (2.26). Звернемося до першого з рівнянь (2.24). Це рівняння з урахуванням формул (3.6), (3.9), (3.11) може бути записане у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1(z,\mathbf{q})}{\partial z^2} - q^2 \tilde{\varphi}_1(z,\mathbf{q}) = 2z_0^2 \chi(z)\left(1-\chi(z)\right)^{-2} \tilde{\varphi}_1(z,\mathbf{q}), \tag{4.1}$$

де функція $\chi(z)$ дається виразом (3.11). У результаті заміни

$$\tilde{\varphi}_1(z,\mathbf{q}) = e^{-zq}\eta(\zeta), \quad \zeta = \left(\chi(z)+1\right)\left(1-\chi(z)\right)^{-1}, \tag{4.2}$$

рівняння (4.1) набуде наступного вигляду:

$$\left(\zeta^2-1\right)\eta'' + 2\left(\zeta+2qz_0\right)\eta' - 2\eta = 0. \tag{4.3}$$

Розв'язання рівняння (4.3) дається виразом [12, 13]

$$\eta(\zeta) = C_1\eta_1(\zeta) + C_2\eta_2(\zeta), \tag{4.4}$$

де

$$\eta_1(\zeta) = \zeta + 2qz_0, \quad \eta_2(\zeta) = \left(\zeta+2qz_0\right)\int d\zeta \left(\zeta+1\right)^{2qz_0-1}\left(\zeta-1\right)^{-2qz_0-1}\left(\zeta+2qz_0\right)^{-2}. \tag{4.5}$$

Функція $\eta_2(\zeta)$, як неважко переконатися, не задовольняє умові (2.3) обмеженості напруженостей електричного поля в області «1» при $z \to +\infty$. З цієї причини у розв’язку (4.5) необхідно покласти $C_2 = 0$. Зазначимо, що функція $\eta_1(\zeta)$ поліном Якобі [12, 13]. Таким чином, приходимо до наступного виразу для потенціалу $\tilde{\varphi}_1(z,\mathbf{q})$:

$$\tilde{\varphi}_1(z,\mathbf{q}) = C_1^{(1)}(\mathbf{q})\, e^{-zq}\left(\frac{1+\chi(z)}{1-\chi(z)} + 2qz_0\right). \tag{4.6}$$

Розв'язання другого та третього з рівнянь (2.24) у загальному випадку мають вигляд:

$$\tilde{\varphi}_2(z,\mathbf{q}) = C_1^{(2)}(\mathbf{q})e^{qz} + C_2^{(2)}(\mathbf{q})e^{-qz}, \tag{4.7}$$

$$\tilde{\varphi}_3(z,\mathbf{q}) = C_1^{(3)}(\mathbf{q})e^{qz} + C_2^{(3)}(\mathbf{q})e^{-qz}.$$

З урахуванням тієї обставини, що напруженості полів при $z \to -\infty$ овинні залишатися кінцевими, константу $C_2^{(3)}(\mathbf{q})$ в (4.7) необхідно покласти рівною нулю, $C_2^{(3)}(\mathbf{q}) \equiv 0$. Константи ж $C_1^{(1)}(\mathbf{q})$, $C_1^{(2)}(\mathbf{q})$, $C_2^{(2)}(\mathbf{q})$, $C_1^{(3)}(\mathbf{q})$ мають бути знайдені з граничних умов (2.26). Як легко переконатися, ці константи будуть виражені через величину $\tilde{\xi}(\mathbf{q})$, що представляє собою відповідно (2.7), (2.14), (2.15) Фур'є-образ профілю просторово періодичної поверхні плівки рідкого діелектрика на твердій підкладці:

$$\tilde{\varphi}_1(z,\mathbf{q}) = \tilde{\xi}(\mathbf{q})e^{q(\bar{\xi}-z)}(aB - Ab)^{-1}\left(\frac{1+\chi(z)}{1-\chi(z)} + 2qz_0\right)\left(E_0B(\varepsilon-1)\varepsilon^{-1} - 4\pi enA\right), \tag{4.8}$$

$$\tilde{\varphi}_2(z,\mathbf{q}) = \tilde{\xi}(\mathbf{q})(Ab - aB)^{-1}\left(4\pi en - bE_0(\varepsilon-1)\varepsilon^{-1}\right)\left(e^{q(\bar{\xi}-z)}(A+1) - e^{q(z-\bar{\xi})}\right),$$

$$\tilde{\varphi}_3(z,\mathbf{q}) = -\tilde{\xi}(\mathbf{q})(Ab - aB)^{-1}\varepsilon\varepsilon_d^{-1}e^{q(\bar{\xi}-z)}(\delta+1)\left(4\pi ena - bE_0(\varepsilon-1)\varepsilon^{-1}\right),$$

де для спрощення запису введено такі позначення:

$$a = 2qz_0 + E_0/E, \qquad b = aq + 4\pi en/E, \qquad n = \frac{E_0^2 - E^2}{8\pi T}, \quad \delta \equiv \frac{\varepsilon_d - \varepsilon}{\varepsilon_d + \varepsilon}, \tag{4.9}$$

$$A = C - 1, \qquad B = \varepsilon q(C+1), \qquad C = \delta e^{-2q(d+\bar{\xi})}.$$

Розв'язки рівнянь (2.25) для потенціалів $\tilde{\varphi}_\alpha^{(e)}(z,\mathbf{q})$, $\alpha = 1,2,3$ даються формулами

$$\tilde{\varphi}_1^{(e)}(z,\mathbf{q}) = C_2^{(e1)}(\mathbf{q})e^{-qz}, \tag{4.10}$$

$$\tilde{\varphi}_2^{(e)}(z,\mathbf{q}) = C_1^{(e2)}(\mathbf{q})e^{qz} + C_2^{(e2)}(\mathbf{q})e^{-qz},$$

$$\tilde{\varphi}_3^{(e)}(z,\mathbf{q}) = C_1^{(e3)}(\mathbf{q})e^{qz}.$$

Вигляд цих рішень обраний таким чином, щоб напруження зовнішніх полів при $z \to \pm\infty$ залишалися кінцевими. Константи у виразах (4.10) також можуть бути знайдені з відповідних граничних умов (2.26), внаслідок чого потенціали $\tilde{\varphi}_\alpha^{(e)}(z,\mathbf{q})$ можуть бути записані у вигляді:

$$\tilde{\varphi}_1^{(e)}(z,\mathbf{q}) = \tilde{\xi}(\mathbf{q})\, BE\,(\varepsilon-1)\,\varepsilon^{-1}\,(B-qA)^{-1}\, e^{q(\bar{\xi}-z)} \tag{4.11}$$

$$\tilde{\varphi}_2^{(e)}(z,\mathbf{q}) = \tilde{\xi}(\mathbf{q})\,\varepsilon^{-1}\,(B-qA)^{-1}\, qE\,(\varepsilon-1)\left\{e^{q(\bar{\xi}-z)}\,(A+1) - e^{q(z-\bar{\xi})}\right\},$$

$$\tilde{\varphi}_3^{(e)}(z,\mathbf{q}) = \tilde{\xi}(\mathbf{q})\,\varepsilon^{-1}\,(B-qA)^{-1}\, qE\,(\varepsilon-1)(1-\delta)\, e^{q(z-\bar{\xi})},$$

де всі константи, як і раніше, визначаються формулами (4.9).

Звернемося тепер до останнього рівнянь (2.24). Підставляючи до нього знайдені розв'язки (4.8), (4.11), з урахуванням (2.15) отримаємо:

$$\Phi(\mathbf{q}_0)\,\tilde{\xi}(\mathbf{q}_0) = 0, \tag{4.12}$$

де функція $\Phi(\mathbf{q}_0)$ має вигляд:

$$\Phi(\mathbf{q}_0) = \frac{q_0\left(E_0^2 - E^2\right)}{4\pi\varepsilon}\,\frac{C^2 f_1 + Cf_2 + f_3}{C^2 g_1 + Cg_2 + g_3} - \alpha\left(\kappa^2 + q_0^2\right). \tag{4.13}$$

Для спрощення запису у формулі (4.13) уведено такі позначення:

$$f_1 \equiv (\varepsilon-1)\Big(-(\varepsilon-1)(2x)^2 + 2x + (\varepsilon+1)\,y\Big), \qquad f_2 \equiv 2\varepsilon\Big(-(\varepsilon-1)(2x)^2 + \varepsilon(2x+1) + y\Big), \tag{4.14}$$

$$f_3 \equiv \Big[-\left(\varepsilon^2-1\right)(2x)^2 + 2x\left(2\varepsilon^2+3\varepsilon+1\right) + 2\varepsilon(\varepsilon+2) - y\left(\varepsilon^2+2\varepsilon-1\right)\Big],$$

$$g_1 \equiv (\varepsilon-1)\Big((\varepsilon-1)\,2x(2x+1) - y\Big), \qquad g_2 \equiv 2\Big(\left(\varepsilon^2-1\right)2x(2x+1) - y\Big),$$

$$g_3 \equiv (1+\varepsilon)\Big((1+\varepsilon)\,2x(2x+1) + y\Big),$$

у яких, у свою чергу, літерами x і y позначені безрозмірні величини

$$x \equiv \frac{q_0 T}{eE_0}, \qquad y \equiv \frac{E_0^2 - E^2}{E_0^2}. \tag{4.15}$$

Як легко бачити, рівняння (4.12) допускає два розв'язки: $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_0) = 0$ и $\Phi(\mathbf{q}_0) = 0$. Перший із цих розв'язків є тривіальним. Рівність $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_0) = 0$ означає, що просторово періодичні структури на поверхні рідкого діелектрика відсутні. Іншими словами, поверхня рідкого діелектрика залишається плоскою. Сам факт наявності фазового переходу до просторово періодичного профілю поверхні рідкого діелектрика передбачає, що $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_0) \neq 0$, див. (2.7), (2.14), (2.15). Таким чином, у цьому випадку ми повинні звернутися до другого розв'язку, $\Phi(\mathbf{q}_0) = 0$, з якого випливає рівняння:

$$\frac{q_0\left(E_0^2-E^2\right)}{4\pi\varepsilon}\frac{C^2 f_1+Cf_2+f_3}{C^2 g_1+Cg_2+g_3}-\alpha\left(\kappa^2+q_0^2\right)=0. \tag{4.16}$$

Це рівняння визначає лише модуль вектора $\mathbf{q}_0$ як функцію фізичних параметрів задачі – температури T, числа електронів n_S над одиницею площі плоскої поверхні рідкого діелектрика, густини цього діелектрика ρ, його коефіцієнта поверхневого натягу α і діелектричної проникності ε, а також діелектричної проникності твердої підкладки ε_d. Це викликано тією обставиною, що в лінійному наближенні теорії збурень по $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_0)$ система ізотропна щодо $\mathbf{q}_0$. Нагадаємо, що сам вектор $\mathbf{q}_0$ характеризує обернену решітку двовимірної періодичної структури всередині її елементарного осередку, $\exp(i\mathbf{q}_0\boldsymbol{\rho})=\cos(q_{0x}x)+i\sin\left(q_{0y}y\right)$. Як уже згадувалося вище, для простоти можна вважати, що поверхня рідкого діелектрика просторово однорідна вздовж осі $0y$ і періодична вздовж осі $0x$. Тоді вектор $\mathbf{q}_0$ паралельний осі x, а його модуль q_0 являє собою постійну оберненої ґратки такої періодичної структури. У цьому випадку профіль поверхні рідкого діелектрика, що утворився внаслідок фазового переходу, нагадує профіль листа шиферу. Вище також зазначалося, що лінійне наближення не визначає самої амплітуди $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_0)$. В цьому ми безпосередньо переконалися під час аналізу формули (4.12).

У(4.16) величини C, $f_1, f_2\ f_3$, $g_1, g_2\ g_3$ мають досить складну залежність від q_0, див. (4.9). З цієї причини аналітичний розв'язок рівняння (4.16) у загальному випадку неможливий. Зауважимо, однак, що умовою появи нової фази – періодичних структур у системі заряджених ферміонів над поверхнею плівки рідкого діелектрика є рівність нуля у критичній точці вектора зворотної ґрати q_0

$$q_0=0. \tag{4.17}$$

При $q_0=0$ в критичній точці рівняння (4.16) набуває вигляду:

$$T=\frac{(\varepsilon+1)eE_0}{8\pi\alpha\varepsilon^2\kappa^2}\left(E_0^2-E^2\right). \tag{4.18}$$

Рівняння (4.18) є рівнянням критичної поверхні фазового переходу в тривимірному просторі $\{E,T,n_s\}$ (див. (3.14)). Наприклад, якщо зафіксувати температуру T і число зарядів n_s на одиницю площі плоского діелектрика, то з рівняння (4.18) можна знайти критичне значення зовнішнього поля $E_c=E_c(n_S,T)$, вище якого в системі відбудеться фазовий перехід з утворенням просторово періодичної структури поверхні рідкого діелектрика.

Розглянемо такий фазовий перехід зовнішньому полю докладніше. Поблизу критичного значення зовнішнього електричного поля E_c, що визначається рівнянням (4.18), $E \sim E_c$ (але $E > E_c$), відповідно (4.17) значення вектора q_0 має бути малим. З цієї причини вважатимемо справедливою нерівність

$$x \equiv \frac{q_0 T}{eE_0} \ll 1 . \tag{4.19}$$

Будемо також припускати, що виконується нерівність (випадок тонкої плівки рідкого діелектрика):

$$q_0 d \ll 1, \qquad \varepsilon \ll \varepsilon_d \tag{4.20}$$

внаслідок чого можна приблизно вважати $C = 1$, см. (4.9). Тоді рівняння (4.16) набуває такого вигляду:

$$q\left(E_0^2 - E^2\right)\left(f_1 + f_2 + f_3\right) - 4\pi\varepsilon^2\alpha\left(\kappa^2 + q^2\right)\left(g_1 + g_2 + g_3\right) = 0 . \tag{4.21}$$

З формул (4.14), (4.9) видно, що права частина цього рівняння є поліном четвертого ступеня щодо q_0. З огляду на ту обставину, що

$$g_1 + g_2 + g_3 = 8x(2x+1)\varepsilon^2 , \qquad f_1 + f_2 + f_3 = -4\varepsilon\Big((\varepsilon - 1)(2x)^2 - (2x+1)(\varepsilon + 1)\Big),$$

можна побачити, що один із коренів рівняння (4.21) дорівнює нулю. Три корені, що залишилися, можуть бути знайдені з рівняння

$$\alpha\left(\kappa^2 + \frac{(2x)^2}{l^2}\right)(2x+1) + \frac{E_0^2 - E^2}{4\pi\varepsilon^2 T l}\Big((\varepsilon - 1)(2x)^2 - (2x+1)(\varepsilon + 1)\Big) = 0 , \qquad l = \frac{2T}{eE_0} \tag{4.22}$$

Щоб знайти розв'язок рівняння (4.22) при малих x (см. (4.19)), необхідно розкласти його коефіцієнти в ряд за різницею $E - E_c$ в околиці критичного значення притискаючого електричного поля та фіксованих значеннях параметрів T, n_s. Рівняння, що вийшло, містить всього один корінь, що має фізичний сенс. В результаті приходимо до наступного виразу для q_0:

$$q_0 \approx \kappa\sqrt{2\frac{E - E_c}{E_{0c}}}\sqrt{\frac{1 + \dfrac{(\varepsilon+1)\pi e^3 n_{sc}^2 E_{0c}}{\varepsilon^2\alpha\kappa^2 T_c}}{1 + \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\left(\dfrac{2T_c\kappa}{eE_{0c}}\right)^2}} , \tag{4.23}$$

де $E_{0c} = E_c + 4\pi e n_{sc}$, $\kappa^2 = \dfrac{\rho}{\alpha}(g + f)$ (див. (1.12)). Індекс «с» у деяких величинах, що входять до формули (4.23) означає, що ці величини лежать на поверхні фазового переходу, заданої виразом (4.18). Порівнюючи далі вирази (3.17) і (4.18), можна дійти висновку, що на фазовій поверхні справедливе співвідношення

$$T_c = \varepsilon^{-1} e E_{0c} \left|\bar{\xi}_c\right|, \tag{4.24}$$

де $\bar{\xi}_c$ - значення зсуву $\bar{\xi}$ на фазовій поверхні (4.18). У зв'язку з цим вираз (4.23) може бути представлений у дещо іншому вигляді:

$$q_0 \approx \kappa \sqrt{2\frac{E-E_c}{E_{0c}}} \sqrt{\frac{1+\dfrac{\pi e^2 n_{sc}^2}{\varepsilon\alpha\kappa^2\left|\bar{\xi}_c\right|}}{1+4\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon^2(\varepsilon+1)}\kappa^2\bar{\xi}_c^2}}. \tag{4.25}$$

Тут необхідно зробити певне застереження. Строго кажучи, в області малих q_0, $q_0 \to 0$ розвинена теорія збурень (див. (2.7) - (2.13)) стає незастосовною. Однак рівняння (4.18) або (4.24) для визначення критичних параметрів фазового переходу до просторово-періодичного впорядкування залишаються і в цьому випадку справедливими. Подібна ситуація докладно розглянута в роботі [11], де вивчалися фазові переходи в нормальній фермі-рідини, пов'язані з порушенням трансляційної симетрії. У справжній роботі докладний аналіз цієї проблеми проводити не будемо. Зазначимо лише таку обставину. Рівняння (4.16), (4.21), (4.22) виписані у припущенні, що $q_0 \sim \kappa$, $\kappa^2 = \dfrac{\rho}{\alpha}(g+f)$, див. (1.12). Якщо вважати це припущення обмеженням величини q_0 «знизу», то формули (4.23), (4.25) залишаються справедливими в області малих q_0 у разі, якщо виконані обмеження (4.19), (4.20). Умова (4.19) з використанням (4.24) може бути записана у вигляді:

$$q_0\left|\bar{\xi}_c\right| \ll 1. \tag{4.26}$$

Зазначимо, що ця умова відповідає зробленому вище припущенню про малість градієнтів профілю поверхні рідкого діелектрика, див. (2.9) – (2.11). Оскільки $q_0 \sim \kappa$, то відповідно до (4.26) має виконуватися нерівність

$$\kappa\left|\bar{\xi}_c\right| \ll 1. \tag{4.27}$$

Остання нерівність може бути використана для подальшого спрощення формули (4.25). Якщо вважати, що діелектрична проникність рідкого діелектрика не надто велика, $\varepsilon \sim 1$, то з урахуванням (4.27) формула (4.25) може бути записана у вигляді:

$$q_0 \approx \kappa \sqrt{2\frac{E-E_c}{E_{0c}}} \sqrt{\frac{\pi e^2 n_{sc}^2}{\varepsilon\alpha\kappa^2\left|\bar{\xi}_c\right|}}, \tag{4.28}$$

або

$$q_0 \approx \sqrt{2\frac{E-E_c}{E_{0c}}}\sqrt{\frac{\pi e^2 n_{sc}^2}{\varepsilon\alpha\left|\bar{\xi}_c\right|}}\,. \qquad (4.29)$$

Тут ми описували стан несиметричної фази поблизу поверхні фазового переходу (4.18) або (4.24). Це припускає, що корінь $\sqrt{(E-E_c)/E_{0c}}$ в (4.28) є малим,

$$\sqrt{(E-E_c)/E_{0c}} \ll 1\,. \qquad (4.30)$$

Отже, щоб виконувалася умова $q_0 \sim \kappa$, необхідно задовольнити нерівність

$$\sqrt{\pi e^2 n_{sc}^2 / \varepsilon\alpha\kappa^2\left|\bar{\xi}_c\right|} \gg 1\,. \qquad (4.31)$$

Зауважимо, що діелектрична проникність гелію ε мало відрізняється від одиниці, $\varepsilon - 1 \approx 0.057$. Крім того, в експериментах з електронами над поверхнею рідкого гелію реальними є умови, коли справедлива нерівність (4.27) або $\left(T_c\kappa/eE_{0c}\right) \ll 1$. З цієї причини умови (4.27), (4.30), (4.31) у цьому випадку можуть бути задоволені. Отже, період зворотної ґрати періодичної структури на поверхні рідкого гелію в певних умовах повинен характеризуватись виразом (4.29).

Таким чином, умова $q_0 \sim \kappa$, обмежуючи значення величини знизу, дозволяє уникнути зазначених труднощів в області малих q_0 з розвиненою теорією обурень по $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$ (див. (2.7) – (2.13)). Тим самим виправдовується використання лінійного наближення теорії збурень та підтверджується справедливість отриманих формул (4.23), (4.25) та (4.29) за умови справедливості співвідношень (4.27), (4.30), (4.31).

У разі, коли порушується умова (4.19),

$$x \equiv \frac{q_0 T}{eE_0} \sim 1\,,$$

рівняння (4.16), що визначає залежність періоду ґрат від фізичних характеристик системи, може бути розв'язане лише чисельно. Такі чисельні розрахунки проводилися на основі експериментальних даних, опублікованих у роботі [16]. У цій роботі описується експеримент, в якому спостерігалася поява макроскопічних лунок на рідкому поверхні. ^{4}He, когда внешнее электрическое поле превышает некоторое критическое значение. коли зовнішнє електричне поле перевищує певне критичне значення. Встановлено, що при зовнішньому полі в 1820 і температурі 4,2 К на поверхні рідкого ^{4}He виразно спостерігалися двовимірні гексагональні лункові гратки з періодом $a \approx 1.76mm$ $\left(a = 2\pi/q_0\right)$ з числом електронів порядку 10^7 у кожній лунці при товщинах гелієвої плівки від 0,2 до 1,9 см. Середня кількість електронів n_s (см. (3.11)), що знаходяться над одиницею площі поверхні рідкого гелію в цьому експерименті можна оцінити так. Можна вирахувати відношення кількості електронів в одній лунці до площі елементарного осередку. Площа елементарного осередку в гексагональній решітці дорівнює площі ромба з ребром $a \approx 1.76mm$ і кутом при вершині, рівним $\pi/3$. Таким чином, здобудемо, що $n_s \approx 0,37 \cdot 10^9 cm^{-2}$. Вважаючи у формулі (4.16) $\varepsilon \ll \varepsilon_d$, $q_0 = 2\pi/a$ і підставляючи значення параметрів $E = 1820V/cm$, $a \approx 1.76mm$, $d = 1cm$, $T = 4,2K$, здобудемо $n_s \approx 0,84 \cdot 10^9 cm^{-2}$. Як легко бачити, збіг розрахункових та експериментальних значень величини задовільний, особливо з огляду на наближеність оцінки цієї величини, виходячи з експериментальних даних [16]. Звичайно, порівняння наших результатів з експериментальними даними може здаватися не цілком коректним. Причиною може бути кілька причин. По-перше, в експерименті [16] мова, мабуть, йде про розвинений просторово періодичний рельєф поверхні плівки рідкого гелію. У нашій роботі розглядався просторово періодичний профіль поверхні в несиметричній фазі поблизу фазового переходу. По-друге, як зазначалося, з урахуванням лінійного наближення теорії збурень не можна визначити амплітуду профілю поверхні $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_0)$ через фізичні характеристики системи. Тому неможливо і вказати, який саме вид має просторово періодичний рельєф поверхні плівки рідкого діелектрика, що описується у нашій роботі. Найбільш простим видом просторово періодичної структури поверхні, що виникла в результаті фазового переходу, може бути рельєф типу поверхні листа шиферу. Тому порівняння результатів цієї роботи з експериментальними результатами може мати лише якісний характер.

На закінчення розділу зробимо також таке зауваження. Всі виконані розрахунки у цій роботі відносяться до випадку зарядів над поверхнею тонкої плівки рідкого діелектрика, розташованої на твердій підкладці з великою діелектричною проникністю $\varepsilon_d \gg \varepsilon$ (для металлической подложки $\varepsilon_d \to \infty$). У разі масивного рідкого діелектрика $d \to \infty$ у всіх наведених вище формулах необхідно покласти $\varepsilon_d \equiv \varepsilon$, $\kappa^2 = \rho g/\alpha$. Як можна переконатися, у разі рішення рівняння (4.16) немає фізичного сенсу. Отже, приходимо до висновку, що у разі системи зарядів над масивним рідким діелектриком фазовий перехід із заснуванням просторово періодичних структур неможливий. Це узгоджується з тим обставиною, що у експериментах з дослідження таких систем подібний фазовий перехід досі не спостерігався (див. у зв'язку, наприклад, [4]).

Висновок.

Таким чином, нами побудовано послідовну теорію систем зарядів над поверхнею плівки рідкого діелектрика. В основі теорії лежить модель самоузгодженого поля в підході Томаса-Фермі, узагальненого стосовно досліджуваної системи. Розвинена теорія дозволяє отримати рівняння самоузгодження для параметрів опису системи: функції розподілу зарядів над поверхнею рідкого діелектрика, потенціалів електростатичного поля у всіх областях системи та профілю поверхні рідкого діелектрика. Істотною є та обставина, що теорія не містить підгонкових констант, що визначаються з експерименту. Отримані рівняння самоузгодження дають можливість описати фазовий перехід у такій системі до просторово періодичних профілів поверхні рідкого діелектрика. Такий перехід описаний у цій роботі у припущенні малої щільності зарядів над поверхнею рідкого діелектрика. Це дозволяє вважати газ зарядів невиродженим і отримати всі характеристики системи, що цікавлять, в аналітичному вигляді. Слід зазначити, що вимога невиродженості газу не є в цьому випадку важливим. Розвинений у цій роботі підхід допускає узагальнення у разі виродженого газу зарядів над поверхнею рідкого діелектрика. Побудова теорії для виродженого газу вимагає окремого розгляду насамперед тому, що в даному випадку у системі необхідно враховувати наявність обмінної взаємодії між зарядами. Це значно ускладнює необхідні математичні обчислення, вимагаючи, очевидно, застосування чисельних методів. Зазначимо, що у нехтуванні обмінною взаємодією основи побудови теорії для випадку виродженого газу над плоскою поверхнею твердого діелектрика сформульовані нами у роботі [10]. Окремо слід обговорити питання про знаходження амплітуд просторово періодичної поверхні рідкого діелектрика. Це питання пов'язані з ізотропією завдання, сформульованої у лінійному наближенні. Справді, як зазначалося вище (див. текст після формули (2.17)), перебування амплітуд $\tilde{\xi}(\mathbf{q})$ профілю поверхні пов'язано з розвитком теорії обурень до кубічних членів $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_0)$ та врахування вищих гармонік типу $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01}+\mathbf{q}_{02})$, $\tilde{\xi}(2\mathbf{q}_{02})$. Це призвело б до появи в рівняннях самоузгодження членів типу $\left(\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})\right)^2$, $\left(\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})\right)^3$... [11]. Такі доданки у рівняннях самоузгодження у Фур'є - просторі призводять до появи членів, пропорційних скалярному твору $(\mathbf{q}_{01}\mathbf{q}_{02})$. Іншими словами, з'являється додатковий параметр, що характеризує фазовий перехід – кут між векторами $\mathbf{q}_{01}$ и $\mathbf{q}_{02}$, що приносить у теорію анізотропію. Нагадаємо, що в рамках лінійного наближення нашої теорії модулі цих векторів рівні між собою, $|\mathbf{q}_{01}|=|\mathbf{q}_{02}|=q_0$. Сама ж величина q_0 визначається через параметри системи в рамках лінійного наближення теорії збурень, принаймні поблизу поверхні переходу. Таким чином, приходимо до висновку, що амплітуди профілю поверхні та кут між векторами $\mathbf{q}_{01}$ і $\mathbf{q}_{02}$ повинні знаходитися із більш високих порядків теорії збурень, що розвивається. В ідеальному варіанті, враховуючи результати експериментів [16], кут між цими векторами повинен дорівнювати $\pi/3$. Така задача наразі розв'язана, але ми з вами в рамках лекцій її розглядати не будемо.

Литература

1. M.W. Cole, M.H. Cohen, Image-potential-induced surface bands in insulators. – Phys. Rev. Lett., 1969, **23**, №21, p. 1238 – 1241.
2. В.Б. Шикин, О движении гелиевых ионов вблизи границы пар – жидкость. – ЖЭТФ, 1970, **58**, вып. 5, с. 1748 – 1756.
3. Ю.П. Монарха В.Б. Шикин, Низкоразмерные электронные системы на поверхности жидкого гелия. – ФНТ, 1982, **8**, №6, с. 563 – 598.
4. Y. Monarkha, K. Kono, Two-dimensional Coulomb Liquids and Solids. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

5. С.С. Эдельман, Левитирующие электроны. – УФН, 1980, **130**, вып. 4, с. 675 – 706.
6. C.C. Grimes, T.R. Brown, M.L. Burns, C.L. Zipfel, Spectroscopy of electrons in image-potential-induced surface states outside liquid helium. – Phys. Rev., 1976, **13**, N 1, p.140-147.
7. O. Hippolito, J.R.D. De Felicio, G.A. Farias, Electron bound states on liquid helium. – Solid State Communs, 1978, **28**, N 5, p.365-368.
8. W.T. Sommer, Liquid helium as a barrier to electrons. – Phys. Rev. Lett., 1964, **12**, N 9, p.271-273.
9. Л.Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Гидродинамика.
10. D.M. Lytvynenko, Yu.V. Slyusarenko, On equilibrium charge distribution above dielectrics surface. – Cond. Matt. Phys., 2009, **12**, N 1, p.19-34.
11. A.S. Peletminsky, S.V. Peletminsky, Yu.V. Slyusarenko, On phase transition in a Fermi liquid. II. Transition associated with translational symmetry breaking. – Low Temperature Physics, 1998, **25**, N5, p. 303-313.
12. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям
13. Джексон
14. T.R. Brown, C.C. Grimes, Observation of cyclotron resonance in surface-bound electrons in liquid helium. - Phys. Rev. Lett., 1972, **29**, №18, p. 1233 – 1236.?????????????????????
15. C.C. Grimes, T.R. Brown, Direct spectroscopy observation of electrons in image – potential state outside liquid helium. - Phys. Rev. Lett., 1974, **32**, №6, p. 280 – 283.
16. P.Leiderer and M.Wanner Structure of the dimple lattice on liquid ^{4}He. Physics Letters A, **73** (1979), 3, pp. 189-192