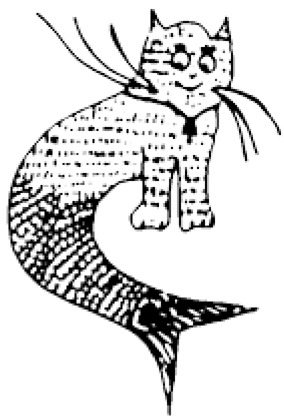
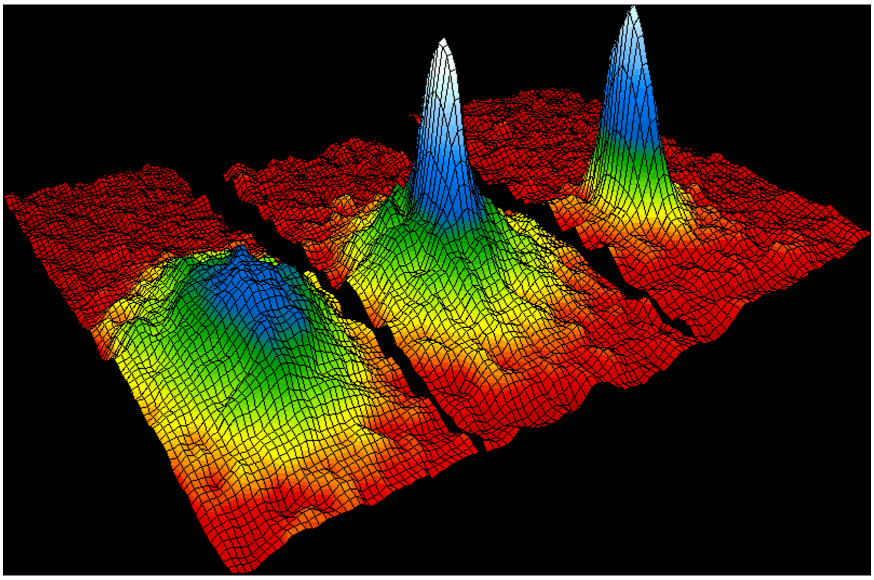
Лекція №13

Макроскопічна теорія поляритонів

При дослідженні поперечних оптичних фононів на минулій лекції ми враховували тільки статичну кулонівську взаємодію між іонами і нехтували запізнілими взаємодіями. Запізніла ж взаємодія переноситься поперечними електромагнітними хвилями, що породжуються при поперечних оптичних коливаннях іонів. Взаємодія квантів вільного електромагнітного поля – фотонів і фононів поперечних оптичних коливань стає великою, коли їх енергія та хвильові вектори стають порівнянними між собою. За таких умов стаціонарним станам кристалу відповідаю «суміш» фононів та фотонів, їх «гібриди», чи навіть «химери». Іноді їх дещо романтично називають «квантовими кентаврами». Такі нові елементарні збудження отримали назву **поляритонів.**



Слід зазначити, що поляритóн (англ. polariton) — складна квазічастинка, що виникає при взаємодії фотонів з елементарними збудженнями середовища — оптичними фононами, екситонами, плазмонами, магнонами чи ще чим. Відповідно поляритони називаються фононними поляритонами, екситонними поляритонами (світлоекситонами), плазмон-поляритонами, магнонними поляритонами і так далі.



Макроскопічна теорія поляритонів в ізотропних середовищах може бути побудована досить просто. Для цього при дослідженні поперечних коливань у рівняннях руху слід зберегти поперечне електромагнітне поле, яким раніше нехтували:

$$\ddot{\xi}_t + \Omega_t^2 \xi_t = \gamma_1 \mathbf{E}_t, \qquad \gamma_1 = \Omega_t \sqrt{\left(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty\right)/4\pi}, \tag{1}$$

$$\mathbf{P}_t = \gamma_1 \xi_t + \gamma_2 \mathbf{E}_t, \qquad \gamma_2 = \frac{\varepsilon_\infty - 1}{4\pi} \tag{2}$$

і доповнити їх рівняннями Максвелла

$$rot\mathbf{H}_t = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}_t + 4\pi \mathbf{P}_t\right), \qquad rot\mathbf{E}_t = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial t}, \tag{3}$$

$$div\mathbf{H}_t = 0, \qquad div\left(\mathbf{E}_t + 4\pi \mathbf{P}_t\right) = 0, \tag{4}$$

що пов’язують поперечні поля $\mathbf{E}_t$ і $\mathbf{H}_t$ з поперечною питомою поляризацією. Для поперечних полів рівняння (4) задовольняються автоматично. Розв’язки системи (1) – (3) будемо шукати у вигляді:

$$\frac{E_x}{E_{x0}} = \frac{P_x}{P_{x0}} = \frac{\xi_x}{\xi_{x0}} = \frac{H_y}{H_{y0}} = \exp\left[i\left(kz - \omega t\right)\right],$$

Тоді здобудемо наступну систему вже алгебраїчних рівнянь

$$\left(\Omega_T^2 - \omega^2\right)\xi_x - \gamma_1 E_x = 0, \quad ,$$

$$kE_x - \frac{\omega}{c} H_y = 0$$

$$\gamma_1 \xi_x + \gamma_2 E_x - P_x = 0\,,$$

$$\frac{\omega}{c}\left(E_x + 4\pi P_x\right) - kH_y = 0\,.$$

Умова існування не тривіальних розв’язків даної системи вимагає занулення детермінанту

	ξ_x	E_x	P_x	H_y
ξ_x	$\Omega_T^2 - \omega^2$	$-\gamma_1$	0	0
E_x	0	k	0	$-\omega/c$
P_x	γ_1	γ_2	–1	0
H_y	0	ω/c	$4\pi\omega/c$	$-k$

і зводиться до наступного рівняння:

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = 4\pi\left(\gamma_2 + \frac{\gamma_1^2}{\Omega_t^2 - \omega^2}\right).$$

Підставляючи до нього наведені вище значення γ_1, γ_2 і згадуючи, що

$$\Omega_l = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty}}\Omega_t\,, \qquad (5)$$

дисперсійне рівняння можна переписати у вигляді:

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = \frac{\varepsilon_\infty\left(\Omega_l^2 - \omega^2\right)}{\left(\Omega_t^2 - \omega^2\right)}. \qquad (6)$$

Правая частина цього рівняння співпадає з діелектричною проникністю $\varepsilon(\omega)$ кристалу, обчисленою без урахування запізнювання взаємодії, див. попередню лекцію)

$$\varepsilon\left(\omega\right) = \varepsilon_\infty + \frac{\left(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty\right)}{\Omega_t^2 - \omega^2}\Omega_t^2 = \frac{\varepsilon_\infty\left(\Omega_l^2 - \omega^2\right)}{\Omega_t^2 - \omega^2}.$$

Рівняння (6) дозволяє обчислити значення хвильового вектора, як функції заданої дійсної частоти. З іншого боку, якщо розв’язувати це рівняння відносно ω, можна визначити частоту нових елементарних збуджень – поляритонів як функцію дійсного хвильового вектора $\mathbf{k}$. Відносно ω рівняння (6) є рівнянням четвертого порядку:

$$\varepsilon_\infty \omega^4 - \omega^2 \left(\varepsilon_\infty \Omega_l^2 + k^2 c^2 \right) + k^2 c^2 \Omega_t^2 = 0 .$$

Але ситуацію полегшує та обставина, що це є біквадратне рівняння. Якщо врахувати вираз (5), то розв'язок цього рівняння можна представити у вигляді:

$$2\varepsilon_\infty \omega_{1,2}^2 = \Omega_t^2 \varepsilon_0 \pm \sqrt{\left(\Omega_t^2 \varepsilon_0 + c^2 k^2 \right)^2 - 4\Omega_t^2 c^2 k^2 \varepsilon_\infty} . \qquad (7)$$

За малих значень $\mathbf{k}$ два розв'язки (7) можна представити наступним чином (теорія збурень за $\mathbf{k}$):

$$(-) ... \omega_1^2 (k) = \frac{c^2 k^2}{\varepsilon_0} , \qquad (8)$$

$$(+) ... \omega_2^2 (k) = \Omega_t^2 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty} + \frac{c^2 k^2}{\varepsilon_\infty} \equiv \Omega_l^2 + \frac{c^2 k^2}{\varepsilon_\infty} .$$

А за великих значень k $\left(k \gg \Omega \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c} \right)$, однак таких, що ще задовольняють умовам макроскопічного опису $\left(ka \ll 1 \right)$, тобто,

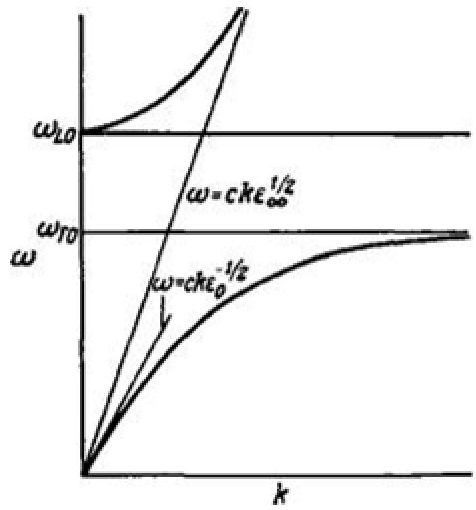
$$\frac{1}{a} \gg k \gg \Omega \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c} ,$$

a - характерні розміри постійної прямої ґратки кристалу, маємо:

$$\omega_2^2 (k) = \frac{c^2 k^2}{\varepsilon_0} ,$$

$$\omega_1^2 = \Omega_t^2 .$$

Отже, маємо дві гілки елементарних збуджень (**поляритонів**): одна гілка з частотами в інтервалі $0 \le \omega_1(k) \le \Omega_t$, а друга гілка з частотами в інтервалі $\Omega_t \le \omega_2(k) < \infty$.



За великих значень k збудження першої гілки співпадають з поперечними фононами, а збудження другої гілки – з фотонами в середовищі з діелектричною проникністю ε_∞. Однак в околі значень $k = \Omega \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c}$ поляритони є вельми складною сумішшю (гібридами) фотонів і фононів. Таким чином, поляритонні збудження є ні чим іншим, як стаціонарними електромагнітними хвилями всередині кристалу. Енергія цих хвиль природним чином містить і енергію поляризаційних коливань кристалу.

В області прозорості кристалу поляритони (великих довжин хвиль, слід нагадати) тотожно співпадають із фотонами в кристалі, оскільки відрізняються від вільних фотонів тої ж частоти, тільки меншою в $n = \sqrt{\varepsilon_0}$ разів довжиною хвилі. Перша поляритонна гілка описує фотони з частотами, меншими за Ω_t, а друга – фотони з частотами, що перевищують Ω_t.

1) У розглянутому нами випадку не враховувалась дисперсія поперечних фотонів, тобто, залежність Ω_t від хвильового вектора. Тому й стверджувалось, що знайдені нами поляритонні гілки справедливі тільки в області прозорості кристалу. При врахуванні скінченного часу життя

поперечних фотонів (урахування дисперсії!) і поляритонні стани будуть мати скінченний час життя.

2) Макроскопічна діелектрична проникність

$$\varepsilon\left(\omega\right)=\varepsilon_{\infty}+\frac{\left(\varepsilon_0-\varepsilon_{\infty}\right)}{\Omega_t^2-\omega^2}\Omega_t^2=\frac{\varepsilon_{\infty}\left(\Omega_l^2-\omega^2\right)}{\Omega_t^2-\omega^2}. \qquad (9)$$

визначена тільки для кристалів досить великих розмірів у порівнянні з довжиною хвилі електромагнітного випромінювання. Тому про поляритонні стани можна говорити тільки у випадку кристалів, розміри яких великі у порівнянні з довжиною хвилі випромінювання.

3). У попередніх міркуваннях передбачалося, що електромагнітне поле знаходиться всередині кристалу й не покидає його. Це справедливо тільки для кристалів, що оточені ідеальними дзеркалами, мають нескінченні розміри. Із кристалів кінцевих розмірів електромагнітне поле випромінюється. Це призводить до додаткового скорочення часу життя поляритонів.

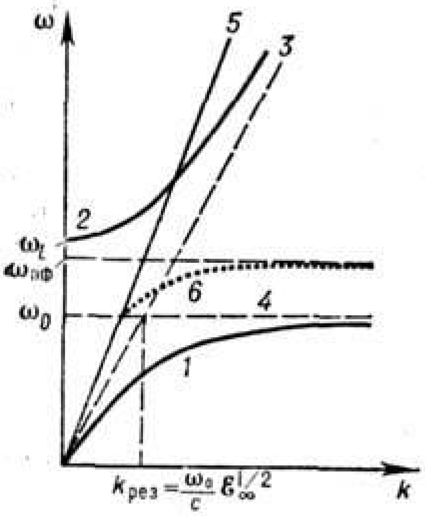


Рис. 1. Дисперсия фононных поляритонов.

До речі, завдяки існуванню поляритонних збуджень можуть виникати зв’язані стани фотонів! Це відбувається в ультрахолодних газах. У момент зіткнення фотонів з охолодженими майже до абсолютного нуля атомами рубідію ($\sim 10^{-7} K$!) фотони набувають маси (атомна складова поляритону). Пересуваючись у хмарі рубідію, фотони рухаються від атома до атома. Кожна взаємодія з атомом триває мільйонні долі секунди, але іноді можуть відбуватися зустрічі фотонів, після яких вони рухаються сумісно нерозривно. Коли вони хмаринку рубідію покидають, вони гублять атомну набуту складову, але "пам’ятають" про те, що з ними відбувалось у хмарі, залишаючись пов’язаними в пари й триплети. Тобто, таким чином можна говорити про утворення фотонних молекул.