

## **Лекція 8.**

### **Метод середнього поля в теорії просторово-періодичних структур заряджених частинок над поверхнею рідких діелектриків**

#### **Частина I. Модель Томаса-Фермі в теорії систем заряджених частинок над поверхнею рідких діелектриків**

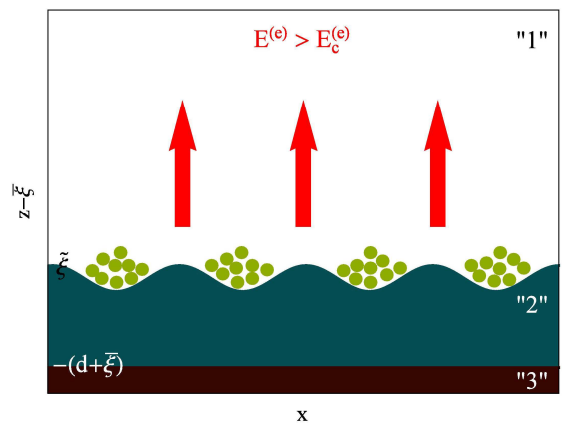
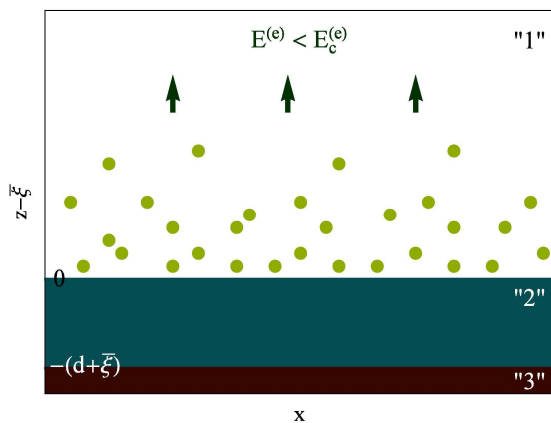
Як добре відомо (див. у цьому зв'язку, наприклад, [1-4]), у системі, що складається з електронів над поверхнею рідкого гелію, в певних умовах виникають просторово-періодичні структури типу двовимірних електронних кристалів чи так званих лункових кристалів. Теоретичні підходи до опису таких структур виходять з уявлення про так звані «лівітуючі» електрони [5]. Первинним поняттям при такому розгляді є опис енергетичного спектра відокремленого заряду над поверхнею діелектрика. Відокремлений заряд над поверхнею діелектрика разом з його електростатичним зображенням у діелектриці трактується як одномірний водневий стан з відповідним енергетичним спектром. Водневодоподібна структура спектру передбачає локалізацію такого квантовомеханічного об'єкта в основному стані на деякій відстані від поверхні діелектрика (перший «борівський радіус»). Це, зокрема, дозволяє здебільшого не враховувати впливу неоднорідностей поверхні на стан відокремленого заряду. Але система зарядів над поверхнею діелектрика є системою багатьох частинок. З цієї причини через далекосяжність кулонівських сил коректність розгляду зарядів як відокремлених над поверхнею діелектрика стає сумнівною навіть у разі малих густин. Остання обставина робить практично неможливим і розрахунок енергетичного спектру зарядів над діелектриком у межах методу електростатичних зображень. Для виходу з цієї ситуації до теперішнього часу в описі такого роду систем використовується паліативний підхід. Зокрема, вважалося, що відокремлений заряд (електрон) знаходиться у зовнішньому модельному потенціалі. Даний потенціал є, по суті, кулонівським потенціалом, модифікованим за допомогою двох підгоночних констант. Ці константи пов'язуються з кінцевим значенням поверхневого потенційного бар'єру та кінцевим значенням потенціалу на поверхні діелектрика (див., наприклад, [6-8]). Крім того, теоретичні роботи, пов'язані з вивченням у феноменологічних підходах

вігнерівської кристалізації електронів над поверхнею рідкого гелію, переважно розглядають систему багатьох заряджених частинок поблизу поверхні рідкого діелектрика саме як двовимірну структуру (див., наприклад, [1, 3, 4]). Виходячи з викладеного вище стає зрозуміло, що повний опис системи зарядів над поверхнею діелектрика має враховувати їхній просторовий розподіл у вакуумі. Ясно також, що електростатичний потенціал у системі, що розглядається, є величиною, узгодженою з розподілом зарядів над поверхнею діелектрика (самоузгодженим полем). Іншими словами, в послідовній теорії, яка не містить параметрів підгонки, цей потенціал повинен знаходитися одночасно з функцією розподілу заряджених частинок над поверхнею діелектрика. Одним із методів теорії самоузгодженого поля є метод Томаса-Фермі, розроблений для опису багатоелектронних атомів в основному стані (див., наприклад, [9]). Цей метод, як відомо, базується на рівнянні Пуассона, що пов'язує електростатичний потенціал із розподілом електронів в атомі. Важливим у цій моделі атома було також уявлення про позитивно заряджене ядро атома, що врівноважує кулонівські сили відштовхування між електронами. У задачі про розподіл зарядів і полів у системі зарядів над поверхнею діелектрика фактором, що врівноважує сили відштовхування між однойменно зарядженими частинками, є поляризаційні сили та зовнішнє притягувальне електричне поле. Таке зовнішнє електричне поле, що притягує заряди до поверхні і впливає на їх просторовий розподіл, використовується в експериментах зі спостереження вігнерівської кристалізації над поверхнею рідкого гелію [3, 4]. Остання обставина призводить до думки про опис розподілу зарядів та полів у системі зарядів над поверхнею діелектрика в рамках методу Томаса-Фермі, модифікованого на випадок таких систем. Такий підхід був реалізований авторами роботи [10]. У цій роботі було розв'язане завдання про рівноважний стан зарядів над поверхнею твердого діелектрика, як у присутність зовнішнього електричного поля, яке притискає заряди до поверхні, так і за його відсутності. Знайдено просторові розподіли зарядів та полів у такій системі, як у випадку ідеально плоскої поверхні, так і шорсткої, у тому числі з просторово періодичними структурами малої амплітуди. Ця лекція присвячена демонстрації можливості побудови підходу до опису розподілів

однойменно заряджених частинок і полів над поверхнею рідкого діелектрика в рамках суттєво узагальненої моделі Томаса-Фермі. В основі узагальнення даної моделі закладено варіаційний принцип, модифікований на випадок системи, що вивчається. Цей варіаційний принцип дозволяє здобути рівняння самоузгодження, що зв'язують параметри опису такої системи.

## 1. Основні засади варіаційного принципу

Перш ніж перейти до формулювань варіаційного принципу, визначимо геометрію системи та основні її характеристики. Розглянемо систему тотожних частинок із зарядом  $Q$ , масою  $m$ , спіном  $S_Q$ , імпульсом  $\mathbf{p}$  та енергією  $\varepsilon_p = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ . Заряджені частинки розташовані у вакуумі над поверхнею плівки рідкого діелектрика завтовшки  $d$ , що має діелектричну проникність  $\varepsilon$ . Вважатимемо, що плівка рідкого діелектрика знаходиться на плоскій твердій діелектричній підкладці з діелектричною проникністю  $\varepsilon_d \gg \varepsilon$ .



Профіль поверхні плівки рідкого діелектрика описуватимемо функцією  $\xi(\boldsymbol{\rho}) \equiv \xi(x, y)$ , де  $\boldsymbol{\rho} \equiv \{x, y\}$  - радіус-вектор у площині  $z=0$  декартової системи координат  $\{z, x, y\}$ . Поверхні розділу областей «1» - «3» у напрямі координат  $\boldsymbol{\rho} \equiv \{x, y\}$  вважатимемо необмеженими. Щоб уникнути питань щодо «розштовхування» однойменно заряджених частинок вздовж, будемо вважати, що

система знаходиться в посудині зі стінками при  $\rho \rightarrow \infty$ . Ці стінки забороняють зарядам залишати систему.

Нехай на частинки діє зовнішнє притягувальне електричне поле  $E$ , направлене уздовж осі  $z$ . Будемо також вважати, що існує потенційний бар'єр, який забороняє проникнення зарядів внутрішню плівку рідкого діелектрика. Усі фізичні величини, що належать до простору  $z > \xi(\rho)$ , будемо позначати індексом «1», фізичні величини, що відносяться до діелектричної рідкої плівки ( $\xi(\rho) > z > -d$ ) – індексом «2», та фізичні величини, що відносяться до діелектричної твердої підкладки ( $z < -d$ ) – індексом «3».

Введемо далі параметри опису системи, що розглядається. В області «1» система повністю описується функцією розподілу частинок  $f_p(\mathbf{r})$ , потенціалом електричного поля  $\phi_1^{(i)}(\mathbf{r})$ , що утворюється системою заряджених частинок, потенціалом зовнішнього притягуючого електростатичного поля  $\phi_1^{(e)}(\mathbf{r})$  та профілем поверхні рідкого діелектрика  $\xi(\rho)$ . В області «2» характеристиками системи вважаються профіль поверхні рідкого діелектрика  $\xi(\rho)$  і сумарний потенціал електричного поля. Під «сумарним» розуміється потенціал зовнішнього електричного поля рідкого діелектрику і поля, наведеного зарядженими частинками, що у області «1». Область «3» характеризується сумарним потенціалом електричного поля у твердій підкладці.

В основі варіаційного принципу лежить поняття термодинамічного потенціалу  $\Omega$

$$\Omega = -S + Y_0 E + Y_i P_i + Y_4 N, \quad (1.1)$$

де  $S$  - ентропія системи

$$S = -\frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{r} d\mathbf{p} \left( \frac{(2\pi\hbar)^3}{g} f_p(\mathbf{r}) \ln \left( \frac{(2\pi\hbar)^3}{g} f_p(\mathbf{r}) \right) - \left( 1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{g} f_p(\mathbf{r}) \right) \ln \left( 1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{g} f_p(\mathbf{r}) \right) \right), \quad (1.2)$$

$P_i$  - сумарний імпульс частинок

$$P_i = \int d\mathbf{r} d\mathbf{p} f_p(\mathbf{r}) p_i, \quad (1.3)$$

$N$  - сумарно число частинок у системі

$$N = \int d\mathbf{r} d\mathbf{p} f_p(\mathbf{r}) \quad (1.4)$$

і  $g$  дається виразом

$$g = (2S_Q + 1). \quad (1.5)$$

Зазначимо, що з написанні формули (1.2) для ентропії для визначеності заряджені частинки передбачалися ферміонами.

Термодинамічні параметри  $Y_0, Y_i, Y_4$ , що входять до (1.1), пов'язані з температурою  $T$ , середньою швидкістю  $v_i$  та хімічним потенціалом  $\mu$  формулами

$$T = \frac{1}{Y_0}, \quad -\frac{Y_i}{Y_0} = v_i, \quad -\frac{Y_4}{Y_0} = \mu \quad (1.6)$$

Зауважимо, що швидкість у разі нерухомої як цілої системи дорівнює нулю (надалі ми розглядатимемо саме випадок  $v_i = 0$ ).

Енергію системи  $E = E(f, \varphi, \xi)$ , яка функціонально залежить від перерахованих вище параметрів опису системи, запишемо у вигляді:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4, \quad (1.7)$$

де  $E_1, E_2, E_3$  - доданки, що визначають енергію системи у всіх вище перерахованих областях «1» - «3», та  $E_4$  - енергія збуреного рідкого діелектрика. У виразі для  $E_1$  із (1.7),

$$\begin{aligned} E_1 = & \int d\mathbf{p} \int_{\xi(\mathbf{p})}^{\infty} dz \int d\mathbf{p} f_p(\mathbf{r}) \varepsilon_p + \frac{Q}{2} \int d\mathbf{p} \int_{\xi(\mathbf{p})}^{\infty} dz \int d\mathbf{p} \varphi_1^{(i)}(\mathbf{r}) f_p(\mathbf{r}) + \\ & + Q \int d\mathbf{p} \int_{\xi(\mathbf{p})}^{\infty} dz \int d\mathbf{p} \varphi_1^{(e)}(\mathbf{r}) f_p(\mathbf{r}) + \frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{p} \int_{\xi(\mathbf{p})}^{\infty} dz (\nabla \varphi_1^{(e)}(\mathbf{r}))^2, \end{aligned} \quad (1.8)$$

перший і другий доданки відповідно є кінетичною енергією системи заряджених частинок і енергію їх кулонівської взаємодії. Третій доданок у виразі (1.8) є енергією заряджених частинок у зовнішньому полі, четверте – енергією зовнішнього поля у просторі над рідким діелектриком (величини  $\varphi_1^{(i)}(\mathbf{r})$  і  $\varphi_1^{(e)}(\mathbf{r})$  в (1.8) визначені вище).

Вираз для  $E_2$  (див. (1.7)) визначає енергію сумарного електричного поля в плівці рідкого діелектрика

$$E_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int d\mathbf{p} \int_{-d}^{\xi(\mathbf{p})} dz (\nabla \varphi_2(\mathbf{r}))^2, \quad \varphi_2 = \varphi_2^{(i)} + \varphi_2^{(e)}. \quad (1.9)$$

а вираз для  $E_3$ ,

$$E_3 = \frac{\varepsilon_d}{8\pi} \int d\mathbf{p} \int_{-\infty}^{-d} dz (\nabla \varphi_3(\mathbf{r}))^2, \quad \varphi_3 = \varphi_3^{(i)} + \varphi_3^{(e)} \quad (1.10)$$

- енергію сумарного електричного поля у твердій підкладці. Під величинами  $\varphi_2^{(i)}$  і  $\varphi_3^{(i)}$  в (1.9), (1.10) маються на увазі потенціали електричного поля в областях «2» та «3», наведені зарядами, що знаходяться в області «1». За допомогою  $\varphi_2^{(e)}$  і  $\varphi_3^{(e)}$  у цих же формулах позначені потенціали зовнішнього електростатичного поля в областях «2» та «3» відповідно. Енергія  $E_4$  збуреного рідкого діелектрика (1.7) дається виразом

$$E_\xi = \frac{\alpha}{2} \int dS \left\{ (\nabla_\rho \xi(\rho))^2 + \kappa^2 \xi^2(\rho) \right\}, \quad dS = d^2 \rho \sqrt{1 + (\nabla_\rho \xi(\rho))^2}, \quad \nabla_\rho \equiv \partial/\partial \rho \quad (1.11)$$

де у першій формулі перший із двох доданків являє собою енергію обуреної поверхні, а друге – енергію об'єму діелектрика в полі зовнішніх сил (див., наприклад, [Ландау, Гідродинаміка]). До зовнішніх сил, що діють на плівку рідкого діелектрика завтовшки  $d$ , відносяться сила тяжіння, а також сили Ван дер Ваальса з боку твердої підкладки з діелектричною проникністю  $\varepsilon_d \gg \varepsilon$ . Відповідно до цього (див., наприклад, [3]) константа в (1.11) визначається виразом

$$\kappa^2 = \frac{\rho}{\alpha} (g + f), \quad (1.12)$$

де  $g$  - прискорення сили тяжіння,  $\alpha$  - коефіцієнт поверхневого натягу рідкого діелектрика,  $\rho$  - його густина, а  $f \sim d^{-4}$  - константа Ван дер Ваальса, якою в випадку масивного рідкого діелектрика ( $d \rightarrow \infty$ ) можна знехтувати порівняно з  $g$ . У випадку тонкої плівки діелектрика, навпаки, гравітація, що діє на атоми рідкого діелектрика, може стати незначною порівняно з силами Ван дер Ваальса.

Тут потрібно зробити наступне зауваження. В області великої густини зарядів модель Томаса-Фермі повинна бути доповнена енергією обмінної взаємодії між однаковими зарядженими частинками. У виродженому газі заряджених частинок така взаємодія може відігравати значну роль. Однак у цій статті ми матимемо

справу з невиродженим газом частинок над поверхнею діелектрика. З цієї причини у формулах (1.8) - (1.10) обмінна взаємодія між частинками не враховується.

Відзначимо також наступну обставину. Серед фізичних характеристик системи, що розглядається, заради досягнення максимально можливої загальності проблеми, що вирішується, умова квазінейтральності не включається. Стосовно системи, що розглядається, така вимога припускала би, що максимальна кількість зарядів над поверхнею діелектрика визначається інтенсивністю зовнішнього електричного поля в області "1". У великій кількості робіт на цю тему стан квазінейтральності вважається незамінним (див., наприклад, [3.4]). До питання про квазінейтральність досліджуваної системи ми повернемося трохи нижче.

В основі варіаційного принципу лежить знаходження мінімуму термодинамічного потенціалу  $\Omega$  (див. (1.1)). Що стосується системи під розглядом, мінімум термодинамічного потенціалу повинен знаходитись за умови справедливості рівняння Пуассона,

$$\Delta\varphi_1^{(i)}(\mathbf{r}) + 4\pi Q \int d\mathbf{p} f_p(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.13)$$

в області «1» ( $z > \xi(\mathbf{p})$ ). В областях «2» и «3» заряди відсутні, отже, для цих областей рівняння (1.13) перетворюється на відоме рівняння Лапласа

$$\Delta\varphi_2^{(i)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta\varphi_3^{(i)}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.14)$$

Зазначимо також, що потенціал зовнішнього притягувального електричного поля задовольняє однакове рівняння у всіх трьох областях

$$\Delta\varphi_1^{(e)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta\varphi_2^{(e)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta\varphi_3^{(e)}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.15)$$

Оператор  $\Delta$  в рівняннях (1.13) – (1.15) є оператором Лапласа:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta_\rho, \quad \Delta_\rho \equiv (\nabla_\rho)^2 = \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1.16)$$

Таким чином, завдання знайти безумовний мінімум термодинамічного потенціалу  $\Omega$  зводиться до пошуку його умовного мінімуму. Відповідно до загальних правил, для цього до термодинамічного потенціалу  $\Omega$ , визначеного формулою (1.1), необхідно додати наступний доданок

$$\Omega' = \int d\mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) \left\{ \Delta\varphi(\mathbf{r}) + 4\pi Q \int d\mathbf{p} f_p(\mathbf{r}) \right\}, \quad (1.17)$$

де  $\lambda(\mathbf{r})$  - множник Лагранжа. Крім того, у варіаційній задачі слід враховувати той факт, що за відсутності заряджених частинок вище плівки рідкого діелектрика його поверхневий профіль не може бути трансформованим

$$\xi(\rho)|_{N=0} = 0. \quad (1.18)$$

З цієї причини ми також додамо наступний член до термодинамічного потенціалу

$$\Omega'' = \int d\mathbf{p} \lambda_\xi(\mathbf{p}) \xi(\mathbf{p})|_{N=0}, \quad (1.19)$$

де  $\lambda_\xi(\mathbf{p})$  - відповідний множник Лагранжа.

Тут потрібно зробити наступне зауваження. Якщо діелектрична плівка утворюється нестисливою рідиною, то деформація поверхні цієї плівки повинна відбуватися таким чином, щоб зберегти повний об'єм рідини діелектрика. Відповідно до цього, до термодинамічного потенціалу  $\Omega$  слід було би додати член  $\Omega'''$ , який і забезпечував би умову збереження об'єму діелектрика:

$$\Omega''' = \lambda \left( \int d\mathbf{p} \int_{-d}^{\xi(\mathbf{p})} dz - V \right), \quad (1.20)$$

де  $V$  - об'єм плівки з незбуреною поверхнею,  $\lambda$  - певний множник Лагранжа. Однак, як відомо з експериментів (див. у цьому плані [3, 4]) взаємодія електронів з плівкою рідкого діелектрика в присутності зовнішнього притягувального електричного поля призводить до просідання плоскої поверхні цієї плівки. Більше того, дно цього просідання залишається плоским до певного критичного значення зовнішнього притягувального поля. На перший погляд, ця обставина суперечить умові нестисливості рідини. Однак, таке протиріччя мало би місце у випадку реальної необмеженої системи  $\rho \rightarrow \infty$  (див. вище). У реальних експериментах включення зовнішнього електричного поля для притягання електронів досягається підведенням до поверхні гелію з боку рідкої фази позитивно зарядженої пластинки плоского конденсатора. Лінійні розміри області осідання плоскої поверхні в цих реальних експериментах порівнянні з лінійними розмірами пластини плоского конденсатора [3, 4]. Лінійні розміри поверхні гелію, звичайно, менші, ніж лінійні розміри конденсаторної пластини. Таким чином, зменшення об'єму рідкого гелію

над конденсаторною пластиною через просідання поверхні плівки під впливом електронів та зовнішнього електричного поля повинне компенсуватися збільшенням об'єму гелію поза пластиною. Ми припускаємо, що подібна ситуація реалізується і для системи, що розглядається в цій лекції. Необмеженість нашої системи при  $\rho \rightarrow \infty$  (див. початок цього розділу) слід розуміти як її обмеження при  $\rho \rightarrow L \rightarrow \infty$ . Таке припущення дозволяє нам відмовитися від умови (1.18) у варіаційній задачі.

Відповідно до формул (1.13) - (1.19), варіаційна задача зводиться до пошуку мінімуму термодинамічного потенціалу  $\tilde{\Omega}$

$$\tilde{\Omega} = \Omega + \Omega' + \Omega'', \quad (1.21)$$

визначеного виразами (1.1), (1.17), (1.19). Необхідною умовою існування такого мінімуму є рівність нуля перших варіаційних похідних:

$$\left. \frac{\delta \tilde{\Omega}}{\delta f} \right|_{\xi, \varphi^{(i)}} = 0, \quad \left. \frac{\delta \tilde{\Omega}}{\delta \varphi^{(i)}} \right|_{f, \xi} = 0, \quad \left. \frac{\delta \tilde{\Omega}}{\delta \xi} \right|_{f, \varphi^{(i)}} = 0. \quad (1.22)$$

Перша умова в (1.22) дає рівняння самоузгодження для функції розподілу зарядів над поверхнею діелектрика

$$f_p(\mathbf{r}) = \theta(z - \xi(\rho)) \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \left( 1 + \exp \left( Y_0 \frac{\delta E}{\delta f_p(\mathbf{r})} + Y_i p_i + Y_4 \right) \right)^{-1}, \quad (1.23)$$

де  $\theta(z)$  - одинична функція Хевісайда. Термодинамічні параметри  $Y_0, Y_i, Y_4$ , що входять до (1.21), пов'язані з температурою  $T$ , середньою швидкістю  $v_i$  та хімічним потенціалом  $\mu$  формулами (1.6). Нагадаємо, що в подальшому будемо розглядати випадок  $v_i = 0$  а, отже,  $Y_i = 0$ .

Другий з умов (1.22) призводить до рівняння для множника Лагранжа  $\lambda(\mathbf{r})$  (див. (1.17))

$$\Delta \lambda(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} Y_0 Q \int d\mathbf{p} f_p(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.24)$$

у першій області та рівняння

$$\Delta \lambda(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.25)$$

в інших двох областях. Легко зрозуміти, що якщо вибрати множник Лагранжа у формі

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{Y_0 \varphi^{(i)}(\mathbf{r})}{8\pi}, \quad (1.26)$$

то рівняння (1,24), (1,25) будуть справедливими у всіх трьох областях. З цієї причини ми й припустимо, що множник Лагранжа  $\lambda(\mathbf{r})$  варіаційній задачі визначається формулою (1.26). Враховуючи цю обставину, вираз (1.23) для  $f_p(\mathbf{r})$  може бути записано в вигляді:

$$f_p(\mathbf{r}) = \theta(z - \xi(\rho)) \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ 1 + \exp Y_0(\varepsilon_p - \mu + Q\varphi) \right\}^{-1} \quad (1.27)$$

Зазначимо також, що вибір коефіцієнта Лагранжа у формі (1.26) забезпечує його неперервність на всіх границях трьох геометричних областей системи через безперервність на цих межах потенціалів електричного поля.

Нарешті, з третьої умови (1.22) отримуємо рівняння самоузгодження для  $\xi(\rho)$ :

$$\begin{aligned} \frac{g}{Y_0(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \ln \left( 1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{g} f_p(\mathbf{r}) \right) \Big|_{z=\xi(\rho)} &= \frac{1}{8\pi} \left( \varepsilon (\nabla \varphi_2)^2 - (\nabla \varphi_1^{(e)})^2 \right)_{z=\xi(\rho)} + \\ &+ \alpha \left\{ \kappa^2 \xi \sqrt{1 + (\nabla_\rho \xi)^2} - \nabla_\rho \left[ \frac{\nabla_\rho \xi \left( 1 + \frac{\kappa^2}{2} \xi^2 + \frac{3}{2} (\nabla_\rho \xi)^2 \right)}{\sqrt{1 + (\nabla_\rho \xi)^2}} \right] \right\} + \lambda_\xi(\rho). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Для того, щоб визначити коефіцієнт Лагранжа  $\lambda_\xi(\rho)$  (див. (1.19)), що входить до рівняння (1.28), до цього рівняння слід застосовувати умову (1.18), тобто, покласти одночасно  $\xi(\rho) = 0$  і  $f_p(\mathbf{r}) = 0$ . Тоді:

$$\lambda_\xi(\rho) = -\frac{1}{8\pi} \left( \varepsilon (\nabla \varphi_2^{(e)})^2 - (\nabla \varphi_1^{(e)})^2 \right)_{z=\xi(\rho)}. \quad (1.29)$$

Як результат, ми прийдемо до кінцевого типу самоузгоджених рівнянь, що поєднують параметри опису досліджуваної системи. Рівняння потенціалів електричного поля, як зовнішніх, так і індукованих зарядами у всіх трьох областях системи, мають форму:

$$\Delta\varphi_1^{(i)}(\mathbf{r}) + 4\pi Q \int d\mathbf{p} f_p(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta\varphi_2^{(i)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta\varphi_3^{(i)}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.30)$$

$$\Delta\varphi_1^{(e)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta\varphi_2^{(e)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta\varphi_3^{(e)}(\mathbf{r}) = 0.$$

Рівняння самосогласовання (1.28) для  $\xi(\rho)$  з урахуванням формул (1.29) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{g}{Y_0(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \ln \left( 1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{g} f_p(\mathbf{r}) \right) \Bigg|_{z=\xi(\rho)} &= \frac{\varepsilon}{8\pi} \left( (\nabla\varphi_2(\mathbf{r}))^2 - (\nabla\varphi_2^{(e)}(\mathbf{r}))^2 \right) \Bigg|_{z=\xi(\rho)} + \\ &+ \alpha \left\{ \kappa^2 \xi(\rho) \sqrt{1 + (\nabla_\rho \xi(\rho))^2} - \nabla_\rho \left[ \frac{\nabla_\rho \xi(\rho) \left( 1 + \frac{\kappa^2}{2} \xi^2(\rho) + \frac{3}{2} (\nabla_\rho \xi(\rho))^2 \right)}{\sqrt{1 + (\nabla_\rho \xi(\rho))^2}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

а функція розподілу  $f_p(\mathbf{r})$ , що входить до цих формул, дається виразом

$$f_p(\mathbf{r}) = \theta(z - \xi(\rho)) \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ 1 + \exp Y_0(\varepsilon_p - \mu + Q\varphi) \right\}^{-1}, \quad Y_0 = T^{-1}, \quad g = 2S_Q + 1. \quad (1.32)$$

Як легко побачити, здобута система рівнянь самоузгодження (1.30) - (1.32) є замкненою. Однак вона повинна бути доповненою граничними умовами для потенціалів електричних полів та їх напруженостей на межах  $z = \xi(\rho)$  і  $z = -d$ .

## 2. Основні рівняння параметрів опису системи в несиметричній фазі

Застосуємо тепер здобуті рівняння для опису просторово-періодичної фази зарядів і полів над поверхнею рідкого діелектрику, яка виникає за певних умов унаслідок фазового перетворення.

У випадку, коли система знаходиться у зовнішньому постійному та однорідному електричному полі, потенціали  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  і  $\varphi_3$  у всіх трьох областях можна представити у вигляді

$$\varphi_\alpha = \varphi_\alpha^{(i)} + \varphi_\alpha^{(e)}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Граничні умови для потенціалів  $\varphi_\alpha$  на границях  $z = \xi(\rho)$  і  $z = -d$  запишемо в вигляді:

$$\varphi_1(z, \rho) \Big|_{z=\xi} = \varphi_2(z, \rho) \Big|_{z=\xi}, \quad \varphi_2(z, \rho) \Big|_{z=-d} = \varphi_3(z, \rho) \Big|_{z=-d}, \quad (2.2)$$

$$\left( (\mathbf{n}(\rho) \cdot \nabla) \{ \varepsilon \varphi_2(z, \rho) - \varphi_1(z, \rho) \} \right)_{z=\xi} = 0, \quad \left\{ \varepsilon \frac{\partial \varphi_2(z, \rho)}{\partial z} - \varepsilon_d \frac{\partial \varphi_3(z, \rho)}{\partial z} \right\}_{z=-d} = 0,$$

$$\varphi_1^{(e)}(z, \rho) \Big|_{z=\xi} = \varphi_2^{(e)}(z, \rho) \Big|_{z=\xi}, \quad \varphi_2^{(e)}(z, \rho) \Big|_{z=-d} = \varphi_3^{(e)}(z, \rho) \Big|_{z=-d}$$

$$\left( (\mathbf{n}(\rho) \cdot \nabla) \{ \varepsilon \varphi_2^{(e)}(z, \rho) - \varphi_1^{(e)}(z, \rho) \} \right)_{z=\xi} = 0, \quad \left\{ \varepsilon \frac{\partial \varphi_2^{(e)}(z, \rho)}{\partial z} - \varepsilon_d \frac{\partial \varphi_3^{(e)}(z, \rho)}{\partial z} \right\}_{z=-d} = 0,$$

доповнюючи їх умовами обмеженості полів на нескінченності

$$\left| \frac{\partial \varphi_1^{(e)}(z, \rho)}{\partial z} \right|_{z \rightarrow +\infty} < +\infty, \quad \left| \frac{\partial \varphi_3^{(e)}(z, \rho)}{\partial z} \right|_{z \rightarrow -\infty} < +\infty, \quad (2.3)$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_1(z, \rho)}{\partial z} \right|_{z \rightarrow +\infty} < +\infty, \quad \left| \frac{\partial \varphi_3(z, \rho)}{\partial z} \right|_{z \rightarrow -\infty} < +\infty.$$

Як легко бачити, граничні умови (2.2) записуються для випадку, коли на межах розділу областей немає поверхневих зарядів.

У формулах (2.2)  $\mathbf{n}(\rho)$  - одиничний вектор нормалі до поверхні в точці  $\rho$ ,

$$\mathbf{n}(\rho) = \{\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu\}, \quad (2.4)$$

де направляючі косинуси, що визначають проекції вектора  $\mathbf{n}(\rho)$  на напрямки осей координат  $z, x, y$  відповідно, даються виразами

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial \xi(\rho) / \partial \rho)^2}}, \quad \cos \lambda = -\frac{\partial \xi(\rho) / \partial x}{\sqrt{1 + (\partial \xi(\rho) / \partial \rho)^2}}, \quad (2.5)$$

$$\cos \mu = -\frac{\partial \xi(\rho) / \partial y}{\sqrt{1 + (\partial \xi(\rho) / \partial \rho)^2}}.$$

Сценарій фазового переходу, що призводить до трансформації поверхні плівки рідкого діелектрика, повинен бути наступним. Як уже згадувалося, зовнішнє

електричне поле, що притягує заряди до поверхні, призводить до просідання плоскої поверхні плівки рідкого діелектрика в області дії цього поля. Більше того, дно цього просідання залишається плоским. Тому деформація поверхні рідкого діелектрика, яка залишає плоским дно області просідання, може бути характеризувана єдиним параметром  $\bar{\xi}$  (глибиною просідання). Якщо плоска поверхня недеформованого рідкого діелектрика описується площиною  $z=0$ , то величина  $\bar{\xi}$  повинна бути від'ємною,  $\bar{\xi} < 0$ . Із подальшим збільшенням напруженості зовнішнього електричного поля, глибина  $\bar{\xi}$  збільшується і поверхня дна деформації залишається плоскою до певного критичного значення сумарного електричного поля  $E_c$  на поверхні діелектрика,

$$E_c = \left| \frac{\partial \varphi_1(z, \mathbf{p})}{\partial z} \right|_{z=\bar{\xi}}. \quad (2.6)$$

Зауважимо, що в той же час, звичайно, повинна дотримуватися умова  $|\bar{\xi}| < d$  у тому випадку, якщо рідкий діелектрик - це плівка товщини  $d$  на твердій підкладці.

Із подальшим збільшенням напруженості притягувального електричного поля профіль поверхні дна, що виникає в результаті, може деформуватися і набути періодичної структури. Звідси випливає, що фазовий перехід до просторово періодичних структур у досліджуваній системі відбувається на тлі плоскої структури рідкого діелектрика.

Слід також зазначити, що управляючим параметром таким фазовим переходом може бути не лише зовнішнє електричне поле, але й температура або густина зарядів над поверхнею рідкого діелектрика. Більше того, як буде видно нижче, ці три параметри (зовнішнє електричне поле, температура та густина зарядів) з'єднані в критичній точці одним рівнянням, що описує двовимірну поверхню. У цьому сенсі мова насправді йде не про точку фазового переходу, а про критичну поверхню фазового переходу.

Відповідно до вищезазначеного сценарію фазового переходу, профіль поверхні рідкого діелектрика у фазі з меншою симетрією може бути представлений у наступній формі:

$$\xi(\rho) = \bar{\xi} + \tilde{\xi}(\rho), \quad (2.7)$$

де через  $\tilde{\xi}(\rho)$  позначено просторово неоднорідний профіль поверхні, що виникає внаслідок фазового переходу на фоні плоскої поверхні  $z = \bar{\xi}$  дна описаної вище однорідної деформації. Таким чином, профіль поверхні  $\tilde{\xi}(\rho)$  є параметром порядку даного фазового переходу. У симетричній фазі ця величина дорівнює нулю, в несиметричному - вона повинна описувати просторово періодичну структуру поверхні. Звідси випливає, що поблизу критичної точки з боку несиметричної фази повинна виконуватись нерівність

$$|\bar{\xi}| \gg |\tilde{\xi}(\rho)|. \quad (2.8)$$

Нагадаємо, що в теорії фазових переходів під «асиметричною фазою» звично розуміти фазу, утворену в результаті фазового переходу, симетрія якої нижче симетрії оригінальної фази, яка в даному випадку називається симетричною.

Для визначення величин  $\bar{\xi}$ ,  $\tilde{\xi}(\rho)$ , а також розподілу зарядів та полів у досліджуваній системі, що виникла внаслідок фазового переходу, використаємо рівняння (1,30) - (1,32), доповнені граничними умовами (2.2) - (2,5).

Перш ніж перейти до розв'язку рівнянь (1,30) - (1,32), розглянемо, як граничні умови (2.2) спрощуються, коли профіль поверхні мало відрізняється від плоскої. У цьому випадку, звичайно, вже говоримо про ефективні граничні умови. Із виразів (1.11) (2.2) - (2.5) зрозуміло, що поверхня мало відрізняється від плоскої у випадку, коли профіль поверхні повільно змінюється з координатами, тобто коли виконується нерівність:

$$|\partial \xi(\rho) / \partial x| \ll 1, \quad |\partial \xi(\rho) / \partial y| \ll 1. \quad (2.9)$$

Із (2.7) - (2.8) випливає, що обґрунтованість цих нерівностей забезпечується в цьому випадку умовами

$$|\partial \tilde{\xi}(\rho) / \partial x| \ll 1, \quad |\partial \tilde{\xi}(\rho) / \partial y| \ll 1. \quad (2.10)$$

Направляючі ж косинуси (2.5) з точністю до членів, квадратичних по  $\partial \tilde{\xi}(\rho) / \partial \rho$ , набувають вигляду:

$$\cos \nu \approx 1, \quad \cos \lambda = -\partial \tilde{\xi}(\rho) / \partial x, \quad \cos \mu = -\partial \tilde{\xi}(\rho) / \partial y. \quad (2.11)$$

В умовах справедливості формул (2.8) - (2.11) можна очікувати, що розподіл зарядів та полів у системі буде мало відрізнятися від розподілів, що виникають у випадку плоскої поверхні діелектрика  $z = \bar{\xi}$ . Тоді потенціали поля  $\varphi_\alpha(z, \mathbf{p})$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  (див. (2.1)) можуть бути представлені в вигляді:

$$\varphi_\alpha(z, \mathbf{p}) = \bar{\varphi}_\alpha(z) + \tilde{\varphi}_\alpha(z, \mathbf{p}), \quad (2.12)$$

де  $\bar{\varphi}_\alpha(z)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  - потенціали сумарного електричного поля в усіх описаних вище областях системи (але не на їх поверхнях розподілу!) у випадку, коли поверхня рідкого діелектрика плоска  $z = \bar{\xi}$ . Потенціалами  $\tilde{\varphi}_\alpha(z, \mathbf{p})$  описуються невеликі спотворення поля у всіх цих областях через неоднорідну поверхню з профілем  $\tilde{\xi}(\mathbf{p})$ . Сенс уведених потенціалів  $\bar{\varphi}_\alpha(z)$ ,  $\tilde{\varphi}_\alpha(z, \mathbf{p})$  стане зрозумілішим після отримання рівнянь Пуассона та ефективних граничних умов для них. Зазначимо також, що представлення, аналогічне (2.12) будемо вважати справедливим для потенціалів зовнішнього електричного поля у всіх трьох областях

$$\varphi_\alpha^{(e)}(z, \mathbf{p}) = \bar{\varphi}_\alpha^{(e)}(z) + \tilde{\varphi}_\alpha^{(e)}(z, \mathbf{p}). \quad (2.12a)$$

Відповідно до зробленого припущення про малі спотворення поля хвилястою поверхнею мають місце нерівності

$$|\bar{\varphi}_\alpha(z)| \gg |\tilde{\varphi}_\alpha(z, \mathbf{p})|, \quad |\bar{\varphi}_\alpha^{(e)}(z)| \gg |\tilde{\varphi}_\alpha^{(e)}(z, \mathbf{p})|. \quad (2.13),$$

Припускаємо далі, що профіль поверхні  $\tilde{\xi}(\mathbf{p})$ , деформований із плоского в результаті фазового переходу, є просторово періодичним

$$\tilde{\xi}(\mathbf{p}) = \int d^2 q \tilde{\xi}(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{p}), \quad \tilde{\xi}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 \rho \tilde{\xi}(\mathbf{p}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{p}), \quad (2.14)$$

де  $\tilde{\xi}(\mathbf{q})$  має вигляд

$$\tilde{\xi}(\mathbf{q}) = \tilde{\xi}(\mathbf{q}_0) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0). \quad (2.15)$$

Вектор  $\mathbf{q}_0$  - характеризує обернену ґратку двовимірної періодичної структури всередині її елементарної чарунки  $\mathbf{q}_0 \mathbf{a} = 2\pi$ , де  $\mathbf{a}$  - вектор прямої ґратки двовимірної періодичної структури.

Періодична структура функції  $\tilde{\xi}(\mathbf{q})$  дозволяє шукати потенціали  $\tilde{\varphi}_\alpha(z, \mathbf{p})$  (см. (2.12)) у вигляді:

$$\tilde{\varphi}_\alpha(z, \mathbf{p}) = \int d^2 q \tilde{\varphi}_\alpha(z, \mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{p}), \quad \tilde{\varphi}_\alpha(z, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 \rho \tilde{\varphi}_\alpha(z, \mathbf{p}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{p}). \quad (2.16)$$

У такому ж вигляді шукатимемо і потенціали  $\tilde{\varphi}_\alpha^{(e)}(z, \mathbf{p})$  зовнішнього електричного поля у всіх трьох областях.

Слід зазначити, що завдяки формулам (2.14), (2.16) величини  $\bar{\xi}$  в (2.7) і  $\bar{\varphi}_\alpha(z)$  в (2.12) можуть трактуватися як значення величин  $\xi(\mathbf{p})$   $\varphi_\alpha(z, \mathbf{p})$ , усереднені по елементарній чарунці двовимірної періодичної структури:

$$\bar{\varphi}_\alpha(z) = \langle \varphi_\alpha(z, \mathbf{p}) \rangle_{\mathbf{q}_0}, \quad \bar{\xi} = \langle \xi(\mathbf{p}) \rangle_{\mathbf{q}_0}. \quad (2.17)$$

(дужки  $\langle \dots \rangle_{\mathbf{q}_0}$  й означають таке усереднення).

Надалі відповідно до формул (2.8) – (2.11) передбачається розвиток теорії обурень за малими відхиленнями  $\tilde{\xi}(\mathbf{p})$ ,  $\tilde{\varphi}_\alpha(z, \mathbf{p})$ ,  $\tilde{\varphi}_\alpha^{(e)}(z, \mathbf{p})$  величин  $\xi(\mathbf{p})$ ,  $\varphi_\alpha(z, \mathbf{p})$ ,  $\varphi_\alpha^{(e)}(z, \mathbf{p})$  від їх незбурених значень  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\varphi}_\alpha(z)$ ,  $\bar{\varphi}_\alpha^{(e)}(z)$ , см. (2.7), (2.12). При побудові такої теорії збурень будуть враховані доданки до першого порядку за малими відхиленнями включно. Тут, однак, необхідно зробити таке зауваження. У загальному випадку двовимірна періодична структура поверхні рідкого діелектрика повинна характеризуватись двома неколінеарними векторами оберненої ґратки -  $\mathbf{q}_{01}$  і  $\mathbf{q}_{02}$ . Відповідно до цього величину  $\tilde{\xi}(\mathbf{q})$  слід би шукати в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(\mathbf{q}) = & \tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01})\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{01}) + \tilde{\xi}(\mathbf{q}_{02})\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{02}) + \tilde{\xi}(2\mathbf{q}_{01})\delta(\mathbf{q} - 2\mathbf{q}_{01}) + \tilde{\xi}(2\mathbf{q}_{02})\delta(\mathbf{q} - 2\mathbf{q}_{02}) + \\ & + \tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01} + \mathbf{q}_{02})\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{01} - \mathbf{q}_{02}) + \tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01} - \mathbf{q}_{02})\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{01} + \mathbf{q}_{02}) + \dots \end{aligned}$$

Ця формула повинна використовуватися як базисна у розвитку згаданої вище теорії збурень. Проте в результаті проведених обчислень ми б переконалися, що для знаходження величин  $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01})$ ,  $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{02})$ ,  $\tilde{\xi}(2\mathbf{q}_{01})$ ,  $\tilde{\xi}(2\mathbf{q}_{02})$ ,  $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01} - \mathbf{q}_{02})$ ,  $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01} + \mathbf{q}_{02})$  доводиться враховувати нелінійні члени теорії збурень аж до кубічних  $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01})$ ,  $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{02})$  (див. у зв'язку з цим [11], де докладно розглянута схожа проблема). Остання обставина призводить до того, що система нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку в силу своєї складності не може бути розв'язана аналітично. Така

сама ситуація спостерігається навіть у тому випадку, коли  $\mathbf{q}_{01} = -\mathbf{q}_{02} = \mathbf{q}_0$ . Даний випадок відповідав би виникненню просторово періодичної структури з одним періодом, наприклад, уздовж осі  $Ox$ . Можна було також переконатися, що в околі фазового переходу абсолютні значення величин  $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01})$ ,  $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{02})$  набагато більші абсолютних значень величин  $\tilde{\xi}(2\mathbf{q}_{01})$ ,  $\tilde{\xi}(2\mathbf{q}_{02})$ ,  $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01} - \mathbf{q}_{02})$ ,  $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01} + \mathbf{q}_{02})$ , наприклад, для  $\tilde{\xi}(2\mathbf{q}_{02})$ ,  $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01} - \mathbf{q}_{02})$ , справедливі співвідношення [11]:

$$|\tilde{\xi}(2\mathbf{q}_{02})| \sim |\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{02})|^2, \quad |\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01} - \mathbf{q}_{02})| \sim |\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01})| |\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{02})|.$$

Таке становище змушує звернутися насамперед до лінійного наближення згаданої вище теорії збурень. У лінійному наближенні теорії збурень рівняння для величин  $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01})$ ,  $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{02})$  співпадають. Причому в цьому випадку доводиться вважати, що  $|\mathbf{q}_{01}| = |\mathbf{q}_{02}| = q_0$ . Однак лінійне наближення теорії збурень не дозволяє визначити напрямки векторів  $\mathbf{q}_{01}$  і  $\mathbf{q}_{02}$ . Не дозволяє воно також визначити самі значення амплітуд  $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{01})$ ,  $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_{02})$ . Лінійне наближення дає можливість визначити залежність модуля  $q_0$ , спільного для векторів  $\mathbf{q}_{01}$ ,  $\mathbf{q}_{02}$ , від фізичних параметрів системи, а також знайти значення для цих параметрів у точці фазового переходу (критичні значення). Рівняння ж, що визначають величину  $q_0$  і критичні параметри, виходять такими, ніби з самого початку малася на увазі справедливість формули (2.15). Наведені вище аргументи є обґрунтуванням зображення величини  $\tilde{\xi}(\mathbf{q})$  у вигляді (2.15).

Повернемося тепер до вихідних рівнянь. Підставляючи (2.7), (2.12) з урахуванням формул (2.9) – (2.11), (2.13) до рівнянь (1.30) – (1.32) та зберігаючи члени, лінійні по  $\tilde{\xi}(\mathbf{p})$ ,  $\tilde{\varphi}_\alpha(z, \mathbf{p})$ , прийдемо до рівнянь, що описують просторову структуру поверхні рідкого діелектрика, розподілу зарядів та полів у несиметричній фазі поблизу критичної поверхні (див. зауваження вище). В аналогічному наближенні виходячи з виразів (2.2) можуть бути отримані граничні умови для потенціалів  $\varphi_\alpha(z, \mathbf{p})$  та напруженостей електричних полів  $\mathbf{E}_\alpha(z, \mathbf{p}) = -\nabla \varphi_\alpha(z, \mathbf{p})$ .

У головному наближенні по  $\tilde{\xi}(\mathbf{p})$ ,  $\tilde{\varphi}_\alpha(z, \mathbf{p})$  рівняння описують розподіл зарядів і полів у разі просторово однорідної плоскої поверхні рідкого діелектрика зі

зниженим рівнем  $z = \bar{\xi}$ . Наведемо спочатку рівняння, що описують систему над поверхнею рідкої плівки діелектрика  $z = \bar{\xi}$ , тобто, в області «1»:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{\varphi}_1(z) = 4\pi e n(z) \theta(z - \bar{\xi}), \quad n(z) = \int d^3 p f_p(z), \quad (2.18)$$

$$f_p(z) = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ \exp \beta [\varepsilon_p - (e\bar{\varphi}_1(z) + \mu)] + 1 \right\}^{-1}, \quad \varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}, \quad \beta = \frac{1}{T}.$$

У головному ж наближенні за вказаними параметрами отримуємо і рівняння для визначення  $\bar{\xi}$ :

$$\frac{g}{Y_0(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \ln \left( 1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{g} f_p(z) \right) \Big|_{z=\bar{\xi}} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left( \left( \frac{\partial \bar{\varphi}_2(z)}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{\partial \bar{\varphi}_2^{(e)}(z)}{\partial z} \right)^2 \right) \Big|_{z=\bar{\xi}} + \alpha \kappa^2 \bar{\xi}. \quad (2.19)$$

У цих рівняннях та у всіх викладках нижче для визначеності вважається, що заряди над поверхнею рідкого діелектрика є електронами, у зв'язку з чим у відповідних формулах заряд частинок  $Q$  вважається рівним заряду електрона,  $Q = -e$ .

В областях «2» та «3» заряди відсутні, через що рівняння для потенціалів  $\bar{\varphi}_2(z)$  і  $\bar{\varphi}_3(z)$  мають вигляд:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{\varphi}_2(z) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{\varphi}_3(z) = 0. \quad (2.20)$$

Нагадаємо, що потенціали зовнішніх полів  $\bar{\varphi}_\alpha^{(e)}(z)$  у всіх трьох областях задовольняють таким самим рівнянням (рівнянням Лапласа)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{\varphi}_\alpha^{(e)}(z) = 0. \quad (2.21)$$

Сумарні потенціали  $\bar{\varphi}_\alpha(z)$ , а також потенціали зовнішнього електричного поля  $\bar{\varphi}_\alpha^{(e)}(z)$  пов'язані на межах трьох областей граничними умовами

$$\bar{\varphi}_{1\xi} = \bar{\varphi}_{2\xi}, \quad \bar{\varphi}_{2d} = \bar{\varphi}_{3d}, \quad \varepsilon \bar{\varphi}'_{2\xi} = \bar{\varphi}'_{1\xi}, \quad \varepsilon_d \bar{\varphi}'_{3d} = \varepsilon \bar{\varphi}'_{2d},$$

$$\bar{\varphi}_{1\xi}^{(e)} = \bar{\varphi}_{2\xi}^{(e)}, \quad \bar{\varphi}_{1d}^{(e)} = \bar{\varphi}_{2d}^{(e)}, \quad \varepsilon \bar{\varphi}_{2\xi}^{(e)'} = \bar{\varphi}_{1\xi}^{(e)'}, \quad \varepsilon_d \bar{\varphi}_{3d}^{(e)'} = \varepsilon \bar{\varphi}_{2d}^{(e)'}. \quad (2.22)$$

У цих формулах за допомогою символу «штрих» позначена похідна першого порядку по  $z$ , а також уведені такі позначення

$$\bar{\varphi}_\alpha(\bar{\xi}) = \bar{\varphi}_{\alpha\xi}, \quad \bar{\varphi}_\alpha(-d) = \bar{\varphi}_{\alpha d}, \quad \bar{\varphi}_\alpha^{(e)}(\bar{\xi}) = \bar{\varphi}_{\alpha\xi}^{(e)} \quad \bar{\varphi}_\alpha^{(e)}(-d) = \bar{\varphi}_{\alpha d}^{(e)}. \quad (2.23)$$

Фур'є-образи  $\tilde{\xi}(\mathbf{q})$ ,  $\tilde{\varphi}_\alpha(z, \mathbf{q})$  величин  $\tilde{\xi}(\mathbf{p})$ ,  $\tilde{\varphi}_\alpha(z, \mathbf{p})$  (див. (2.7), (2.12), (2.14), (2.16)) задовольняють рівнянням

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1(z, \mathbf{q})}{\partial z^2} = \left[ q^2 + 4\pi e^2 \frac{\partial n(z)}{\partial \mu} \right] \tilde{\varphi}_1(z, \mathbf{q}), \quad \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_2(z, \mathbf{q})}{\partial z^2} = q^2 \tilde{\varphi}_2(z, \mathbf{q}), \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_3(z, \mathbf{q})}{\partial z^2} = q^2 \tilde{\varphi}_3(z, \mathbf{q}),$$

$$\begin{aligned} & \alpha(\kappa^2 + \mathbf{q}^2) \tilde{\xi}(\mathbf{q}) + \left[ en \left( \tilde{\varphi}_1(z, \mathbf{q}) + \frac{\partial \tilde{\varphi}_1(z, \mathbf{q})}{\partial z} \tilde{\xi}(\mathbf{q}) \right) \right]_{z=\bar{\xi}} + \\ & + \frac{\varepsilon}{4\pi} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}_2(z)}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\varphi}_2(z, \mathbf{q})}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\varphi}_2^{(e)}(z)}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(e)}(z, \mathbf{q})}{\partial z} \right)_{z=\bar{\xi}} = 0. \end{aligned}$$

Фур'є-образи потенціалів зовнішнього електричного поля  $\tilde{\varphi}_\alpha^{(e)}(z, \mathbf{q})$  у всіх областях системи описуються рівняннями

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\alpha^{(e)}(z, \mathbf{q})}{\partial z^2} = q^2 \tilde{\varphi}_\alpha^{(e)}(z, \mathbf{q}), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (2.25)$$

Рівняння (2.24), (2.25) доповнюються граничними умовами

$$\left\{ \left( \bar{\varphi}_2'(z) - \bar{\varphi}_1'(z) \right) \tilde{\xi}(\mathbf{q}) + \tilde{\varphi}_2(z, \mathbf{q}) - \tilde{\varphi}_1(z, \mathbf{q}) \right\}_{z=\bar{\xi}} = 0, \quad (2.26)$$

$$\left\{ \frac{\partial \tilde{\varphi}_1(z, \mathbf{q})}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}_2(z, \mathbf{q})}{\partial z} \right\}_{z=\bar{\xi}} = 0, \quad \left\{ \tilde{\varphi}_2(z, \mathbf{q}) - \tilde{\varphi}_3(z, \mathbf{q}) \right\}_{z=-d} = 0,$$

$$\left\{ \varepsilon_d \frac{\partial \tilde{\varphi}_3(z, \mathbf{q})}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}_2(z, \mathbf{q})}{\partial z} \right\}_{z=-d} = 0,$$

$$\left\{ \left( \bar{\varphi}_2^{(e)'}(z) - \bar{\varphi}_1^{(e)'}(z) \right) \tilde{\xi}(\mathbf{q}) + \tilde{\varphi}_2^{(e)}(z, \mathbf{q}) - \tilde{\varphi}_1^{(e)}(z, \mathbf{q}) \right\}_{z=\bar{\xi}} = 0,$$

$$\left\{ \frac{\partial \tilde{\varphi}_1^{(e)}(z, \mathbf{q})}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(e)}(z, \mathbf{q})}{\partial z} \right\}_{z=\bar{\xi}} = 0, \quad \left\{ \tilde{\varphi}_3^{(e)}(z, \mathbf{q}) - \tilde{\varphi}_2^{(e)}(z, \mathbf{q}) \right\}_{z=-d} = 0,$$

$$\left\{ \varepsilon_d \frac{\partial \tilde{\varphi}_3^{(e)}(z, \mathbf{q})}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(e)}(z, \mathbf{q})}{\partial z} \right\}_{z=-d} = 0,$$

які виходять з граничних умов (2.2) у лінійному наближенні теорії збурень за  $\tilde{\xi}(\mathbf{p})$ ,  $\tilde{\varphi}_\alpha(z, \mathbf{p})$ ,  $\tilde{\varphi}_\alpha^{(e)}(z, \mathbf{p})$ . Зазначимо, що ці потенціали повинні також задовольняти умови обмеженості напруженості електричних полів на нескінченності, див. (2.3).

Виписані рівняння (2.18) – (2.26) дозволяють вирішити поставлене вище завдання про опис фазового переходу, пов'язаного з утворенням просторово періодичних структур на поверхні плівки рідкого діелектрика в системі, що досліджується. Як легко бачити, розв'язання цього завдання має починатися з розв'язання рівнянь головного наближення (2.18) - (2.21) з граничними умовами (2.22), (2.23). Тим самим буде визначено розподіл зарядів та полів у системі у разі плоскої поверхні рідкого діелектрика, яка задається рівнянням  $z = \bar{\xi}$ . Із рівняння (2.19) може бути знайдена сама величина  $\bar{\xi}$ , визначальна зниження рівня плоскої поверхні з допомогою на цю поверхню розташованих над нею зарядів (електронів).

## Література

1. M.W. Cole, M.H. Cohen, Image-potential-induced surface bands in insulators. – Phys. Rev. Lett., 1969, **23**, №21, p. 1238 – 1241.
2. В.Б. Шикин, О движении гелиевых ионов вблизи границы пар – жидкость. – ЖЭТФ, 1970, **58**, вып. 5, с. 1748 – 1756.
3. Ю.П. Монарха В.Б. Шикин, Низкоразмерные электронные системы на поверхности жидкого гелия. – ФНТ, 1982, **8**, №6, с. 563 – 598.
4. Y. Monarkha, K. Kono, Two-dimensional Coulomb Liquids and Solids. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
5. С.С. Эдельман, Левитирующие электроны. – УФН, 1980, **130**, вып. 4, с. 675 – 706.

6. C.C. Grimes, T.R. Brown, M.L. Burns, C.L. Zipfel, Spectroscopy of electrons in image-potential-induced surface states outside liquid helium. – Phys. Rev., 1976, **13**, N 1, p.140-147.
7. O. Hippolito, J.R.D. De Felicio, G.A. Farias, Electron bound states on liquid helium. – Solid State Communs, 1978, **28**, N 5, p.365-368.
8. W.T. Sommer, Liquid helium as a barrier to electrons. – Phys. Rev. Lett., 1964, **12**, N 9, p.271-273.
9. Л.Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Гидродинамика.
- 10.D.M. Lytvynenko, Yu.V. Slyusarenko, On equilibrium charge distribution above dielectrics surface. – Cond. Matt. Phys., 2009, **12**, N 1, p.19-34.
- 11.A.S. Peletminsky, S.V. Peletminsky, Yu.V. Slyusarenko, On phase transition in a Fermi liquid. II. Transition associated with translational symmetry breaking. – Low Temperature Physics, 1998, **25**, N5, p. 303-313.
- 12.Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям
- 13.Джексон
- 14.T.R. Brown, C.C. Grimes, Observation of cyclotron resonance in surface-bound electrons in liquid helium. - Phys. Rev. Lett., 1972, **29**, №18, p. 1233 – 1236.????????????????????
- 15.C.C. Grimes, T.R. Brown, Direct spectroscopy observation of electrons in image – potential state outside liquid helium. - Phys. Rev. Lett., 1974, **32**, №6, p. 280 – 283.
- 16.P.Leiderer and M.Wanner Structure of the dimple lattice on liquid <sup>4</sup>He. Physics Letters A, **73** (1979), 3, pp. 189-192