

## Лекція №16

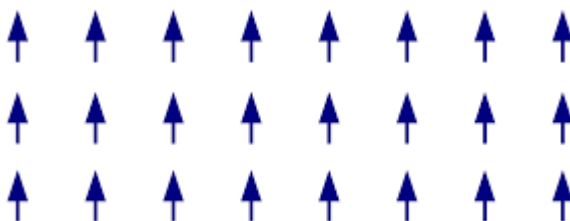
### Феромагнетики й антиферомагнетики

#### 1. Обмінна модель феромагнетика

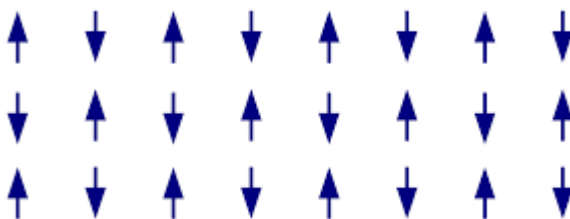
##### Магнітне впорядкування.

Ціла низка кристалів має впорядковану магнітну структуру. Це означає, що за відсутності зовнішнього магнітного поля середнє (квантовомеханічне) значення магнітного моменту, принаймні, одного з атомів у кожній елементарній комірці відмінне від нуля.

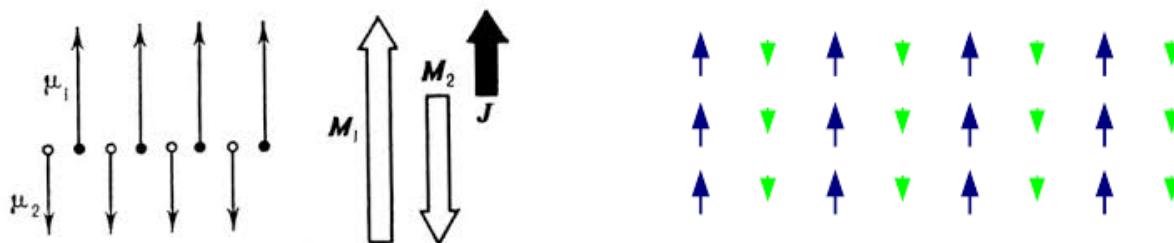
У найпростішому типі магнітовпорядкованих кристалів – **феромагнетиках** (Fe, Ni, Co, Dy) – середнє значення магнітних моментів усіх атомів має однакову орієнтацію, якщо тільки температура феромагнетика не перевищує певної критичної температури – температури Кюрі. Завдяки цьому феромагнетики мають спонтанний магнітний момент, тобто, макроскопічний магнітний момент, відмінний від нуля за відсутності зовнішнього магнітного поля.



У більш складних магнітовпорядкованих кристалах – **антиферомагнетиках** – (до їх числа відносяться карбонати, безводні сульфати, окисли, фториди перехідних металів Mn, Fe, Ni, Co) – середні значення магнітних моментів атомів (за відсутності зовнішнього магнітного поля) компенсують один одного в межах кожної елементарної комірки. Іншими словами, антиферомагнетик є сукупністю двох підґраток (їх називають **магнітними підґратками**), для кожної з яких середнє значення магнітних моментів відмінне від нуля. Така магнітна впорядкованість має місце, якщо температура антиферомагнетика нижча певної критичної температури – температури Нееля.



Існує також іще один тип магнітовпорядкованих кристалів – **ферити**, які складаються із декількох магнітних підґраток, магнітні моменти яких, на відміну від антиферомагнетиків, не компенсуються, так що ферит має спонтанний магнітний момент.



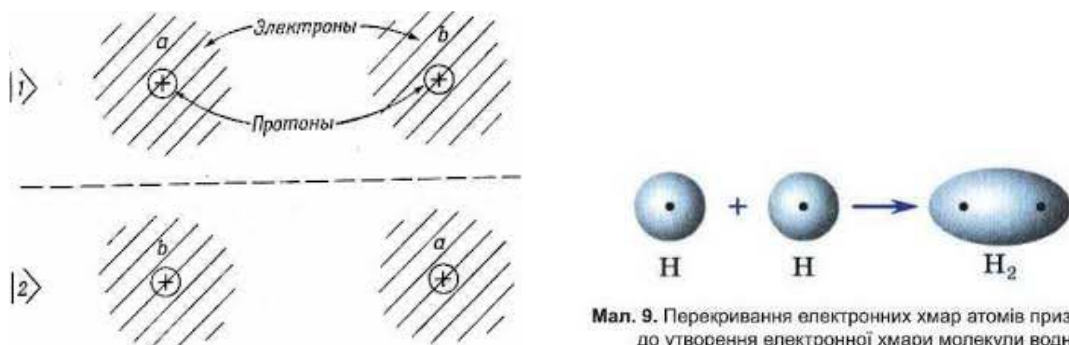
Феритами є, наприклад, сполуки перехідних металів типу комплексних солей  $MnO \cdot Fe_2O_3$ ,  $3Y_2O_3 \cdot 5Fe_2O_3$  ( $Y$  - ітрій) та інші.

Магнітна впорядкованість феро- й антиферомагнетиків виникає завдяки кореляціям між напрямками спінів електронів окремих атомів цих тіл, магнітний момент яких має в основному спінову природу. Ця кореляція зумовлена, в свою чергу, взаємозв'язком між просторовою симетрією хвильової функції та величиною сумарного спіну системи електронів. Такий взаємозв'язок, що є наслідком нерозрізненності однакових частинок, приводить до залежності енергії системи від величини її повного спіну, оскільки хвильовим функціям, що мають різну просторову симетрію, відповідають, узагалі кажучи, різні значення енергії системи.

Суттєвим є те, що при цьому гамільтоніан системи може й не містити членів, що описують магнітні, тобто, релятивістські, взаємодії. Так що мова йде про чисто квантовий ефект, пов'язаний із тим, що електрони підкорюються статистиці Фермі-Дірака. Цей ефект називається обмінним ефектом, а про залежність енергії системи від величини повного спіну (тобто, про залежність енергії від властивостей симетрії хвильової функції) зазвичай говорять, що вона зумовлена обмінною взаємодією.

### Молекула водню.

Характер обмінної взаємодії найпростіше можна пояснити на прикладі молекули водню, два електрони якої електростатично взаємодіють між собою та обома протонами молекули



Мал. 9. Перекривання електронних хмар атомів призводить до утворення електронної хмари молекули водню

Гамільтоніан системи електронів при закріплених на заданій відстані ядрах має вигляд:

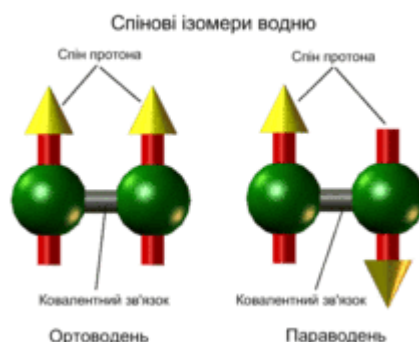
$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + e^2 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{a1}} - \frac{1}{r_{a2}} - \frac{1}{r_{b1}} - \frac{1}{r_{b2}} \right), \quad (0.1)$$

де  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  - оператори імпульсу електронів,  $m$  і  $e$  - їх маса й заряд, а  $r_{\alpha\beta}$  - відстань між частинками (1,2 – індекси електронів,  $a, b$  - індекси ядер,  $r_{ab} \equiv r$ ). Оскільки  $H$  не містить членів, що описують магнітну взаємодію електронів, то хвильову функцію системи електронів  $\psi$  можна представити у вигляді добутку просторової  $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  й спінової  $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$  хвильових функцій

$$\psi(\mathbf{r}_1\sigma_1, \mathbf{r}_2\sigma_2) = \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\chi(\sigma_1, \sigma_2) \quad (0.2)$$

( $\sigma_1, \sigma_2$  - проекції спінів електронів на деяку вісь).

Функція  $\psi$  повинна бути, згідно принципу Паулі, антисиметричною відносно одночасних перестановок координат і спінових змінних електронів. Це означає, очевидно, що симетричній спіновій хвильовій функції відповідає антисиметрична просторова хвильова функція і навпаки. Функція  $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$  буде симетричною, якщо сумарний спін  $S$  обох електронів буде рівним одиниці,  $S=1$ , й антисиметричною, якщо  $S=0$ . Тому просторова частина хвильової функції буде антисиметричною при  $S=1$  й симетричною при  $S=0$ . Ми будемо позначати ці функції відповідно через  $\varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  и  $\varphi_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ .



Припускаючи, що взаємодія між атомами є слабкою, та що вони обидва знаходяться в основному стані, можна наближено побудувати функції  $\varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  і  $\varphi_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  за допомогою хвильових функцій електрона, що рухається в кулонівському полі кожного з ядер:

$$\varphi_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^2)}} \{ \varphi(\mathbf{r}_{a1})\varphi(\mathbf{r}_{b2}) + \varphi(\mathbf{r}_{a2})\varphi(\mathbf{r}_{b1}) \}, \quad S=0, \quad (0.3)$$

$$\varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2(1-\gamma^2)}} \{ \varphi(\mathbf{r}_{a1})\varphi(\mathbf{r}_{b2}) - \varphi(\mathbf{r}_{a2})\varphi(\mathbf{r}_{b1}) \}, \quad S=1,$$

де  $\varphi(\mathbf{r}_{\alpha i})$  - нормована хвильова функція атома водню, що «складений» із  $i$ -го електрона ( $i=1,2$ ) й  $\alpha$ -го ядра ( $\alpha=a,b$ ) і

$$\gamma = \int d\mathbf{r}_1 \varphi(\mathbf{r}_{a1})\varphi(\mathbf{r}_{b1}). \quad (0.4)$$

Значення енергії молекули в станах із  $S=1$  та  $S=0$  пов'язані з функціями  $\varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  та  $\varphi_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  співвідношеннями:

$$E_{\uparrow\uparrow}(r) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) H \varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (0.5)$$

$$E_{\uparrow\downarrow}(r) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \varphi_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) H \varphi_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2).$$

У цих інтегралах опущено знак комплексного спряження, оскільки  $\varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  і  $\varphi_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  є дійсними в силу припущення про те, що атоми знаходяться в основному стані. Підставляючи сюди наведені вище вирази для  $\varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  і  $\varphi_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , знайдемо:

$$E_{\uparrow\uparrow}(r) = \frac{A(r) - B(r)}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \quad E_{\uparrow\downarrow}(r) = \frac{A(r) + B(r)}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad (0.6)$$

де

$$A(r) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 U \varphi^2(\mathbf{r}_{a1}) \varphi^2(\mathbf{r}_{b2}),$$

$$B(r) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 U \varphi(\mathbf{r}_{a1}) \varphi(\mathbf{r}_{b1}) \varphi(\mathbf{r}_{a2}) \varphi(\mathbf{r}_{b2})$$

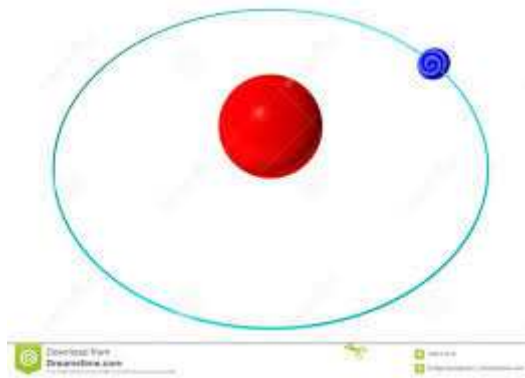
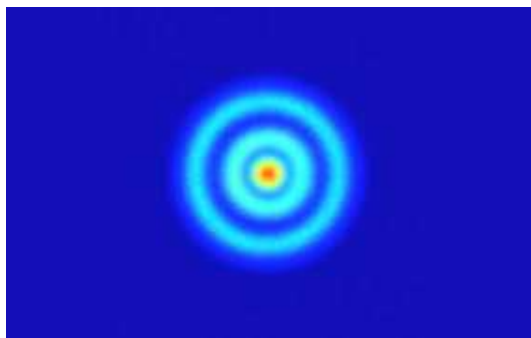
і

$$U = e^2 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{a2}} - \frac{1}{r_{b1}} \right) \quad (0.7)$$

(у виразах для  $E_{\uparrow\uparrow}(r)$  і  $E_{\uparrow\downarrow}(r)$  відкинуто не залежні від  $r$  доданки, що є енергією двох атомів водню, які знаходяться на нескінченній відстані один від одного).

Величина  $A(r)$  визначає, очевидно, електростатичну енергію взаємодії двох атомів у припущенні, що кожний із електронів «жорстко» пов'язаний з одним ядром (електрон 1 з ядром  $a$ , електрон 2 з ядром  $b$ ), а величина  $B(r)$  - їх обмінну енергію. Остання назва пов'язана з тим, що величина  $B(r)$  є

матричним елементом електростатичної енергії взаємодії  $U$  електронів між станом, в якому електрон 1 «належить» ядру  $a$  й електрон 2 «належить» ядру  $b$ , і станом, в якому електрон 1 «належить» ядру  $b$  й електрон 2 «належить» ядру  $a$ . Слід нагадати, що просторова частина хвильової функції атома водню



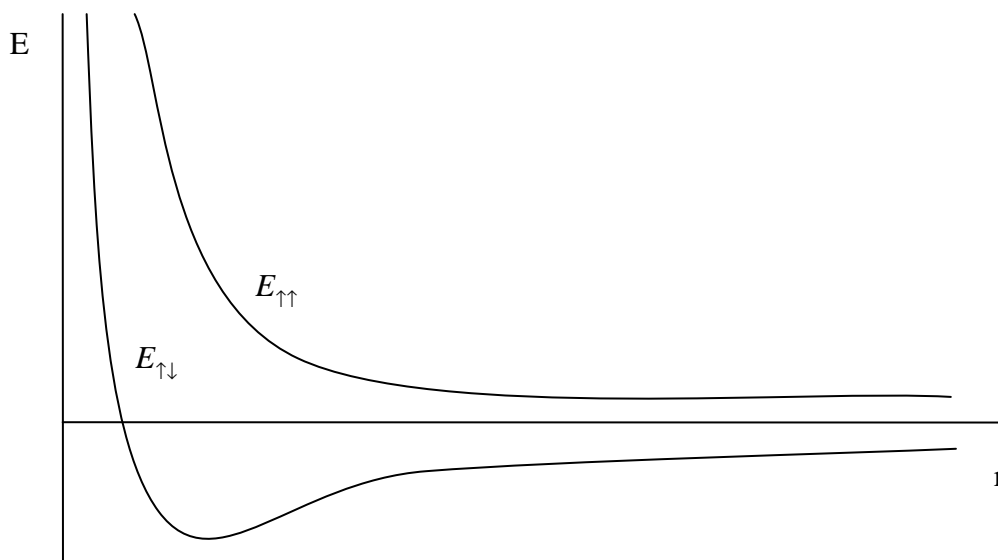
сама по собі має експоненціальну залежність від координати, наприклад, для основного стану:

$$\varphi(\mathbf{r}) \sim \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right), \quad a_0 = \frac{\hbar}{mc\alpha}, \quad \alpha = \frac{e^2}{2\varepsilon_0\hbar c},$$

де  $a_0$  - радіус Бора, а  $\alpha \approx 1/137$  - постійна тонкої структури.

Обмінна енергія відрізняється важливою особливістю: вона експоненційно швидко спадає з відстанню між ядрами, на відміну від повільно спадаючої енергії кулонівської їх взаємодії. Це пояснюється тим, що до  $B(r)$  входить добуток хвильових функцій електронів, «прив'язаних» до різних ядер,  $\varphi(\mathbf{r}_{a1})\varphi(\mathbf{r}_{b1})$  і  $\varphi(\mathbf{r}_{a2})\varphi(\mathbf{r}_{b2})$ . Тому  $B(r)$  залежить від того, якою мірою «перекриваються» хвильові функції  $\varphi(\mathbf{r}_{a1})$  і  $\varphi(\mathbf{r}_{b1})$ , а таке «перекриття» експоненційно зменшується зі зростанням  $r$ . На цій підставі можна сказати, що обмінна взаємодія є короткосяжною.

Якісно хід зміни величин  $E_{\uparrow\uparrow}(r)$  і  $E_{\uparrow\downarrow}(r)$  з ростом  $r$ , тобто, відстані між ядрами, показано на рисунку. Видно, що два незбуджених атома водню можуть утворювати молекулу водню (якій відповідає крива  $E_{\uparrow\downarrow}(r)$  з мінімумом) тільки при антипаралельній орієнтації спінів обох електронів.



Цей приклад наочно показує, що чисто квантовий ефект обміну електронів приводить до ефективної взаємодії між атомами, суттєво залежної від їх сумарного спіну, хоча спіни й не входять явно до початкового (мікроскопічного) гамільтоніану сукупності атомів, що враховує тільки електростатичну взаємодію.

Обмінна взаємодія, що лежить, як показує наведений приклад, в основі гомеоплярного хімічного зв'язку, пояснює також природу феро- й антиферомагнетизму. На відміну від молекули водню, для якої обмінна енергія є від'ємною, ( $B(r) < 0$ ), завдяки чому стан із сумарним спіном  $S=0$  виявляється таким, що має меншу енергію, ніж стан із  $S=1$ , у феромагнетиках стану з більшим спіном відповідає менша енергія, так що в основному стані феромагнетика спіни всіх атомів мають паралельну орієнтацію (Гейзенберг, Френкель, Дорфман).

Для того, щоби математично описати обмінну взаємодію для магнетиків, уведемо до розгляду оператор

$$H = -J(r)\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 + E(r) \quad (0.8)$$

де  $\mathbf{S}_1$  і  $\mathbf{S}_2$  - оператори спінів електронів і  $J(r), E(r)$  - деякі функції від  $r$ , які ми підберемо таким чином, щоб власні значення оператора  $H$ , діючого у просторі спінових змінних, співпадали зі значеннями енергії  $E_{\uparrow\uparrow}(r)$  і  $E_{\uparrow\downarrow}(r)$ .

Оскільки

$$\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2^2) = \frac{1}{2}S(S+1) - \frac{3}{4}, \quad (0.9)$$

то власні значення оператора  $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$  дорівнюють:  $-\frac{3}{4}$  при  $S=0$  і  $\frac{1}{4}$  при  $S=1$ .

Тому власні значення оператора  $H$  будуть співпадати з величинами  $E_{\uparrow\uparrow}(r)$  і  $E_{\uparrow\downarrow}(r)$ , якщо покласти

$$J(r) = E_{\uparrow\downarrow}(r) - E_{\uparrow\uparrow}(r), \quad (0.10)$$

$$E(r) = \frac{3}{4}E_{\uparrow\uparrow}(r) + \frac{1}{4}E_{\uparrow\downarrow}(r).$$

Величина  $E(r)$  визначає, очевидно, середнє значення енергії атомів (паралельній орієнтації спінів електронів відповідає статистична вага  $3/4$ , тоді як антипаралельній орієнтації - статистична вага  $1/4$ ), а  $J(r)$  - обмінну енергію. Відволікаючись від цієї середньої енергії, зазвичай розглядають тільки перший доданок у (0.8), залежний від спіну електронів. Його називають гамільтоніаном обмінної взаємодії електронів і позначають через  $H_e$

$$H_e = -J(r)\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2.$$

Ми здобули обмінну взаємодію, розглядаючи конкретно молекулу водню. Але до неї можна прийти із більш загальних міркувань, виходячи із вимог інваріантності гамільтоніана взаємодії відносно просторових обертань.

Дійсно, поставимо питання про знаходження найбільш загального виразу для гамільтоніану взаємодії двох однакових частинок, припускаючи, що він залежить тільки від координат і спінів частинок. Оскільки із операторів спінів частинок  $\mathbf{S}_1$  і  $\mathbf{S}_2$  та радіус-вектора  $\mathbf{r}$ , що визначає їх відносне положення, можна побудувати тільки три незалежних інваріанта відносно перетворень просторових обертань

$$\mathbf{r}^2, \quad \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2, \quad (\mathbf{r}\mathbf{S}_1)(\mathbf{r}\mathbf{S}_2), \quad (0.11)$$

то шуканий Гамільтоніан  $H$  може бути довільною функцією цих інваріантів. Замість  $(\mathbf{r}\mathbf{S}_1)(\mathbf{r}\mathbf{S}_2)$  зручніше ввести інваріант

$$S_{12} = 3(\mathbf{n}\mathbf{S}_1)(\mathbf{n}\mathbf{S}_2) - \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 \quad (0.12)$$

де  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ , й записати  $H$  у вигляді

$$H = f(r, \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2, S_{12}), \quad (0.13)$$

де  $f$  - довільна функція трьох незалежних змінних.

Якщо спін кожної із частинок дорівнює  $1/2$ , то останній вираз може бути значно спрощений завдяки наступній властивості спіну  $1/2$ : будь-яка ціла позитивна степінь матриць  $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$  і  $S_{12}$ , а також добуток таких степенів

виражається у вигляді лінійної комбінації самих таких матриць та одиничної матриці. Така властивість є наслідком відомого співвідношення для компонентів спіну  $1/2$

$$S_k S_l = \frac{i}{2} \epsilon_{klm} S_m + \frac{1}{4} \delta_{kl}.$$

Використовуючи це співвідношення, легко перевірити, наприклад, що

$$(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2)^2 = \frac{3}{16} - \frac{1}{2} S_{12},$$

$$S_{12}^2 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 - \frac{1}{2} S_{12}$$

$$S_{12} (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2) = (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2) S_{12} = \frac{1}{4} S_{12}.$$

Звідси витікає, що розкладаючи функцію  $f$  в ряд по степеням її аргументів, гамільтоніан  $H$  можна представити у вигляді:

$$H = U_1(r) + U_2(r) \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 + U_3(r) S_{12}, \quad (0.14)$$

де  $U_1(r)$ ,  $U_2(r)$ ,  $U_3(r)$  - деякі функції від відстані між частинками. Слід нагадати ще раз, така формула справедлива тільки у випадку частинок, що мають spin  $1/2$ .

Із першими двома доданками в цій формулі ми вже познайомились вище, при розгляді молекули водню. Що ж стосується третього доданку, то у випадку двох електронів воно є їх енергією магнітної взаємодії, тобто, енергією взаємодії магнітних моментів електронів,  $\frac{e\hbar}{mc} \mathbf{S}_1$  і  $\frac{e\hbar}{mc} \mathbf{S}_2$ . При цьому

$$U_3(r) \approx \left( \frac{e\hbar}{mc} \right)^2 \frac{1}{r^3}. \text{ Ця енергія містить у порівнянні з } U_1(r) + U_2(r) \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2$$

додатковий множник  $\frac{1}{c^2}$  (точніше кажучи, множник  $\left( \frac{v}{c} \right)^2$ , де  $v$  - величина порядку середньої швидкості електронів в атомі. У випадку молекули водню ми не враховували цієї енергії, що має релятивістське походження, оскільки  $v \ll c$ .

### Обмінний гамільтоніан феромагнетика.

Перейдемо тепер до встановлення виду гамільтоніану феромагнетика. Головне питання, яке нас цікавить, полягає у з'ясуванні характеру енергетичного спектру феромагнетика поблизу основного стану, якому, як показує досвід, і як має пояснювати теорія, відповідає паралельна орієнтація магнітних моментів окремих атомів.



Якщо припустити, що кристал формується аналогічно молекулі водню, тобто, з окремих атомів, кожен з яких містить по одному електрону в основному стані, використовуючи зазначений гамільтоніан можна приблизно знайти енергетичні рівні кристала. Однак для дослідження більш загальних випадків мікроскопічний гамільтоніан є надто складним, щоб ним можна було користуватися безпосередньо. Тому природно спробувати перейти від мікроскопічного гамільтоніану до гамільтоніану, що має більш просту математичну структуру і приводить у головних рисах до такого ж енергетичного спектру, як і вихідний гамільтоніан. Цей перехід можна зробити аналогічно розглянутому вище переходу від мікроскопічного гамільтоніану двох атомів водню, до обмінного гамільтоніану, що має більш просту структуру, ніж вихідний гамільтоніан. При цьому, як ми бачили, якщо йдеться про енергетичні стани, що виникають з основних станів двох атомів і відрізняються лише значенням сумарного спина, то вихідний гамільтоніан еквівалентний обмінному гамільтоніану.

Наше головне припущення полягає в тому, що ми отримаємо правильну фізичну картину енергетичного спектру феромагнетика поблизу його основного стану, якщо замінимо мікроскопічний гамільтоніан феромагнетика сумою обмінних гамільтоніанів різних пар його атомів (більш точне виведення такого гамільтоніану наведено в роботах Боголюбова й Тяблікова).

Нехай усі атоми феромагнетика мають спин  $1/2$ . Тоді обмінний гамільтоніан феромагнетика, яким ми замінюємо вихідний мікроскопічний, матиме вигляд суми гамільтоніанів (0.8)

$$H_e = -\frac{1}{2} \sum_{l \neq m} J(\mathbf{R}_{lm}) \mathbf{S}_l \mathbf{S}_m \quad (0.15)$$

де  $\mathbf{S}_l$  і  $\mathbf{S}_m$  - спіни атомів, які знаходяться в  $l$ -му та  $m$ -му вузлах ґратки і  $J(\mathbf{R}_{lm})$  - деяка функція від радіус-вектора  $\mathbf{R}_{lm}$ , що з'єднує  $l$ -й та  $m$ -й вузли (Підсумовування проводиться по всіх парах атомів кристала). Ця функція, що має назву обмінного інтеграла  $l$ -го й  $m$ -го атомів, дуже швидко (експоненційно) зменшується зі збільшенням відстані між атомами, оскільки вона визначається ступенем перекриття хвильових функцій атомів. Тому практично величина  $J(\mathbf{R}_{lm})$  відмінна від нуля лише в тому випадку, якщо  $l$ -й та  $m$ -й атоми є сусідніми, при цьому

$$J(\mathbf{R}_{lm}) \sim \xi \frac{e^2}{a}, \quad (0.16)$$

де  $a$  - постійна ґратки й  $\xi$  - числовий параметр порядку 0,1, що визначається ступенем перекриття хвильових функцій сусідніх атомів.

У цьому гамільтоніані відстані між атомами вважається заданими, а динамічними змінними є лише оператори спінів атомів, які діють (а, отже, і сам гамільтоніан  $H_e$ ) на хвильову функцію системи, що є функцією тільки від спінових змінних, але не від просторових координат частинок.

Для феромагнетика обмінний інтеграл позитивний

$$J(\mathbf{R}_{lm}) > 0,$$

завдяки чому в основному стані спіни всіх атомів мають одну й ту саму орієнтацію. Ця орієнтація, однак, не виділена, якщо враховувати лише обмінну взаємодію. Напрямок цей визначається релятивістськими взаємодіями, про які йшлося вище.

Важливою властивістю обмінного гамільтоніану (0.15), який зазвичай називається гайзенберґівським гамільтоніаном (говорять також про модель феромагнетика Гайзенберґа, маючи на увазі під цим феромагнетик, який описується гамільтоніаном (0.15)), є те, що він комутує з кожною із проекцій сумарного спіну феромагнетика

$$\mathbf{S} = \sum_l \mathbf{S}_l. \quad (0.17)$$

Дійсно, використовуючи відомі перестановочні співвідношення для операторів проекцій спіна атома

$$[S_{l\alpha}, S_{m\beta}] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{l\gamma} \delta_{lm}$$

( $\alpha, \beta, \gamma$  - координатні індекси), легко впевнитись, що

$$(\mathbf{S}_l + \mathbf{S}_m)(\mathbf{S}_l \mathbf{S}_m) = (\mathbf{S}_l \mathbf{S}_m)(\mathbf{S}_l + \mathbf{S}_m)$$

і тому

$$H_e \mathbf{S} = \mathbf{S} H_e.$$

Звідси випливає, що при врахуванні лише обмінної взаємодії квадрат повного спіну системи та його проекція на якусь вісь будуть квантовомеханічними інтегралами руху, тобто, обмінна взаємодія сама собою змінити цих величин неспроможна. Ця обставина цілком зрозуміла, якщо згадати, що з мікроскопічної точки зору обмінна взаємодія – це суто електростатична взаємодія з урахуванням симетрії хвильових функцій системи.

Як зазначалося, магнітний момент феромагнетика має переважно спінову природу. Тому можна визначити оператор густини магнітного моменту феромагнетика  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  в точці  $\mathbf{r}$  як суму

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = 2\mu_0 \sum_l \mathbf{S}_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l), \quad (0.18)$$

де  $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$  - магнетон Бора,  $\mathbf{R}_l$  - радіус-вектор, що визначає положення  $l$ -го вузла кристалічної ґратки.

Гамільтоніан обмінної взаємодії можна виразити через оператор густини магнітного моменту

$$H_e = -\frac{1}{2(2\mu_0)^2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' J(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}) \mathbf{M}(\mathbf{r}').$$

Легко переконатися також, що оператори проекцій густини магнітного моменту задовольняють комутаційним співвідношенням

$$[M_i(\mathbf{r}), M_k(\mathbf{r}')] = 2i\varepsilon_{ikl} M_l(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$