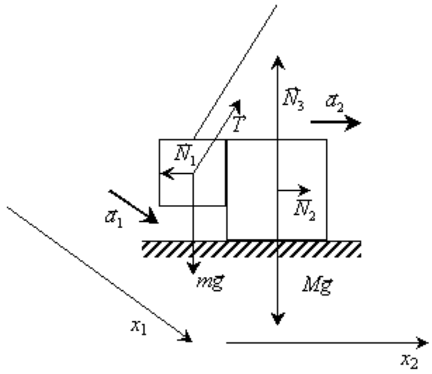
Решение задач для 10 класса.

1. Рассмотрим силы, действующие на кубики. На оба кубика действуют силы тяжести (*mg* и *Mg)*. На каждый кубик действует сила реакции со стороны другого кубика (N_1 и N_2). Кроме того, на левый кубик действует сила натяжения нити *T*, а на правый - сила реакции поверхности N_3. Ускорение левого кубика a_1 направлено перпендикулярно нити, а правого a_2 - горизонтально. Запишем второй закон Ньютона:

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T} = m\vec{a}_1 \\ M\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 = M\vec{a}_2 \end{cases}$$



Спроецируем первое уравнение на ось x_1, перпендикулярную нити, а второе - на горизонтальную ось x_2:

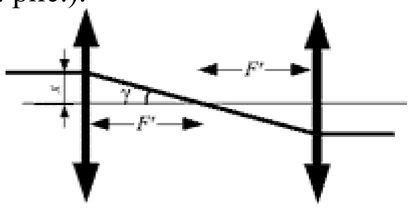
$mg\sin\alpha - N_1\cos\alpha = ma_1$

$N_2 = Ma_2$

Поскольку кубики не отрываются друг от друга, горизонтальные проекции их ускорений равны: $a_1\cos\alpha = a_2$. Кроме того, по третьему закону Ньютона $N_1 = N_2$. Решая получившуюся систему уравнений, имеем:

$$a_1 = \frac{mg\sin\alpha}{m + M\cos^2\alpha}, \qquad a_2 = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{m + M\cos^2\alpha}.$$

2. При заполнении пространства между линзами веществом с коэффициентом преломления *n*, фокусные расстояния у линз изменятся (станут равными какому-то значению F'). Чтобы пучок лучей остался параллельным, эти новые фокусы у линз должны совпадать, т. е. расстояние между линзами должно быть равно $2F'$ (см. рис.).



Рассмотрим луч, параллельный главной оптической оси, отстоящий от нее на *x*. Если бы область справа от линзы не заполнять веществом, рассматриваемый луч вышел бы из линзы под углом *α*, таким что $tg\alpha = x/F$. Значит, перед тем, как выйти из линзы (внутри стекла), угол наклона луча *β* удовлетворял закону Снелиуса $n_{cm}\sin\beta = \sin\alpha$ (1), где n_{cm} - коэффициент преломления стекла. После заполнения области веществом с коэффициентом преломления *n*, угол *β* не изменится, а угол выхода луча из линзы заменится с *α* на *γ*, удовлетворяющему соотношению $n_{cm}\sin\beta = n\sin\gamma$ (2). Сравнивая (1) и (2), получаем $\sin\gamma = \sin\alpha/n$. Воспользуемся тем, что при рассмотрении хода лучей в линзе угол между лучом и главной оптической осью линзы считается малым (условие параксиальности). Тогда $\sin\alpha \approx tg\alpha = x/F$. Аналогично $\sin\gamma \approx tg\gamma = x/(nF)$. Значит, фокусное расстояние линзы F' станет равно nF, а расстояние между линзами должно быть $2nF$.

3. Обозначим расстояние между первым автомобилем и центром кольцевой дороги величиной l (при этом $l = R/\cos\alpha$). Определим угловую скорость отрезка, соединяющего автомобили. Для этого разложим скорость первого автомобиля на параллельную и перпендикулярному этому отрезку компоненту. Угловая скорость отрезка определяется перпендикулярной компонентой и равна $\omega = v\cos\alpha/l = v\cos^2\alpha/R$. Такой же будет и угловая скорость второго автомобиля, поэтому его линейная скорость $u = \omega R = v\cos^2\alpha$. Это позволяет определить нормальное ускорение второго автомобиля $a_n = u^2 / R = v^2\cos^4\alpha / R$.

Нормальное ускорение направлено к центру кольцевой дороги.

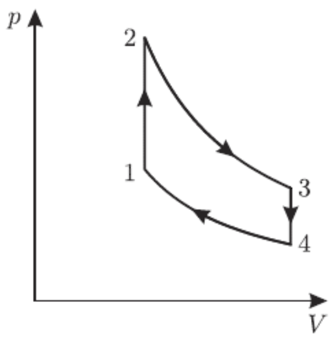
Поскольку скорость второго автомобиля $u = \omega R = v\cos^2\alpha$ уменьшается по мере движения автомобилей, это означает, что его ускорение будет иметь еще и тангенциальную составляющую, направленную противоположно его скорости. Для вычисления этой составляющей рассмотрим короткий промежуток времени Δt. По его истечении расстояние между первым автомобилем и центром кольцевой дороги увеличится на величину Δl, а скорость второго автомобиля уменьшится на величину Δu, поэтому $u - \Delta u = vR^2/(l+\Delta l)^2$. Отсюда уменьшение скорости будет равно:

$$\Delta u = \frac{vR^2}{l^2} - \frac{vR^2}{(l+\Delta l)^2} = \frac{vR^2\Delta l(2l+\Delta l)}{l^2(l+\Delta l)^2} \approx \frac{2vR^2\Delta l}{l^3}.$$

Чтобы сделать последний переход, мы пренебрегли Δl по сравнению с $2l$ в числителе и по сравнению с l в знаменателе. Увеличение расстояния между первым автомобилем и центром дороги Δl за время Δt определяется проекцией скорости первого автомобиля на отрезок, соединяющий автомобили: $\Delta l = v\Delta t\sin\alpha$. Это позволяет определить тангенциальное ускорение второго автомобиля: $a_\tau = \dfrac{\Delta u}{\Delta t} = \dfrac{2vR^2\Delta l}{l^3\Delta t} = \dfrac{2v^2R^2\sin\alpha}{l^3} = \dfrac{2v^2}{R}\sin\alpha\cos^3\alpha$.

Полное ускорение второго автомобиля будет $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \dfrac{v^2}{R}\cos^3\alpha\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$.

4. График процесса изображен на рисунке. Процессы 1–2 и 3–4 изохорические, поскольку на этих участках не совершается работа, $\delta A = 0$. Процессы 2–3 и 4–1 изотермические, поскольку на этих участках $\delta Q = \delta A$, тогда из 1-го начала термодинамики $dU = 0$.



КПД цикла вычисляется по формуле $\eta = \dfrac{A_{цикл}}{Q_{получ}}\cdot 100\%$. Тогда $\eta = \dfrac{2}{8}\cdot 100\% = 25\%$.

5. Так как размер металлического шара намного меньше диаметра диска можно считать, что он находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = \sigma / 2\varepsilon_0$, где $\sigma = Q/\pi R^2$ - поверхностная плотность заряда диска. Электростатическая сила, действующая шар равна $F = |q|E$, где q - суммарный заряд, сосредоточенный на шаре.

Так как электрического поля внутри сферы нет, то потенциал в центре сферы равен потенциалу на ее поверхности, т.е. нулю (сфера заземлена). С другой стороны, этот потенциал равен сумме потенциалов создаваемых диском и распределением зарядов на шаре.

Рассчитаем потенциал в середине диска создаваемый зарядами диска (так как $r << R$ он равен потенциалу в центре сферы). Для этого можно разбить диск на кольца шириной da и сложить потенциалы создаваемые всеми кольцами. Рассмотрим кольцо радиуса a, его заряд равен $2\pi\sigma a da$. В своем центре оно создает потенциал $d\phi = 2\pi\sigma a da/(4\pi\varepsilon_0 a) = \sigma da/(2\varepsilon_0)$. Суммируя по всем кольцам и учитывая, что $\sum da = R$, получим, что потенциал в центре сферы создаваемый зарядами диска равен: $\phi_1 = \sigma R/(2\varepsilon_0)$.

Потенциал в центре сферы создаваемый зарядами на сфере в свою очередь равен $\phi_2 = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$. Учитывая, что $\phi_1 + \phi_2 = 0$ мы получим $q = -2\pi\sigma rR$. Сила, действующая на шар равна $F = \pi\sigma^2 rR/\varepsilon_0$.