Розв'язки задач III (обласного) етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з фізики

2018/2019 навчальний рік

Харківська область

8 клас

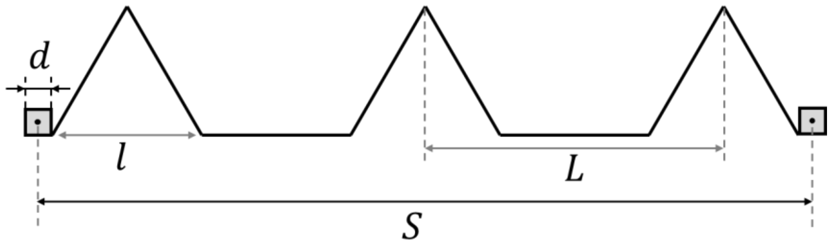
1. Нехай довжина хвилинної стрілки годинника $l_\text{х}$, а секундної - $l_\text{с}$. Тоді за один період кінець хвилинної стрілки долає шлях $2\pi l_\text{х}$, а секундної – $2\pi l_\text{с}$. Якщо періоди обертання стрілок становлять $T_\text{х}$ та $T_\text{с}$, то швидкості кінців відповідно $\frac{2\pi l_\text{х}}{T_\text{х}}$ та $\frac{2\pi l_\text{с}}{T_\text{с}}$. Коли стрілки знаходяться під кутом 0°, вони рухаються в одному напрямку, тому відносна швидкість кінців дорівнює $(2\pi l_\text{с})/T_\text{с} - (2\pi l_\text{х})/T_\text{х}$. Вона відрізняється від швидкості кінця хвилинної стрілки у $\frac{(2\pi l_\text{с}/T_\text{с} - 2\pi l_\text{х}/T_\text{х})}{2\pi l_\text{х}/T_\text{х}} = \frac{T_\text{х} l_\text{с}}{T_\text{с} l_\text{х}} - 1$ разів. Коли стрілки знаходяться під кутом 180°, вони рухаються у протилежних напрямках, тобто відносна швидкість кінців $\frac{2\pi l_\text{с}}{T_\text{с}} + \frac{2\pi l_\text{х}}{T_\text{х}}$, що у $\frac{T_\text{х} l_\text{с}}{T_\text{с} l_\text{х}} + 1$ разів відрізняється від швидкості кінця хвилинної стрілки. Умовою задачі задано співвідношення $l_\text{с} = n l_\text{х}$ та $T_\text{х} = m T_\text{с}$, з яких отримуємо для випадків 0° та 180° відповіді $nm - 1$ та $nm + 1$ разів. Підставляючи числові значення $n = 2$ та $m = 60$, маємо 119 та 121 разів.

2. Нехай висоти стовпів рідин h_1 та h_2. Тоді тиск на дно мензурки становить $p = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2$, а загальна висота $h = h_1 + h_2$. Виражаючи звідси висоту $h_2 = h - h_1$ та підставляючи у формулу для тиску, маємо $p = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g(h - h_1)$, тобто $h_1 = \frac{p/g - \rho_2 h}{\rho_1 - \rho_2}$. І знаходимо $h_2 = h - \frac{p/g - \rho_2 h}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{\rho_1 h - p/g}{\rho_1 - \rho_2}$.

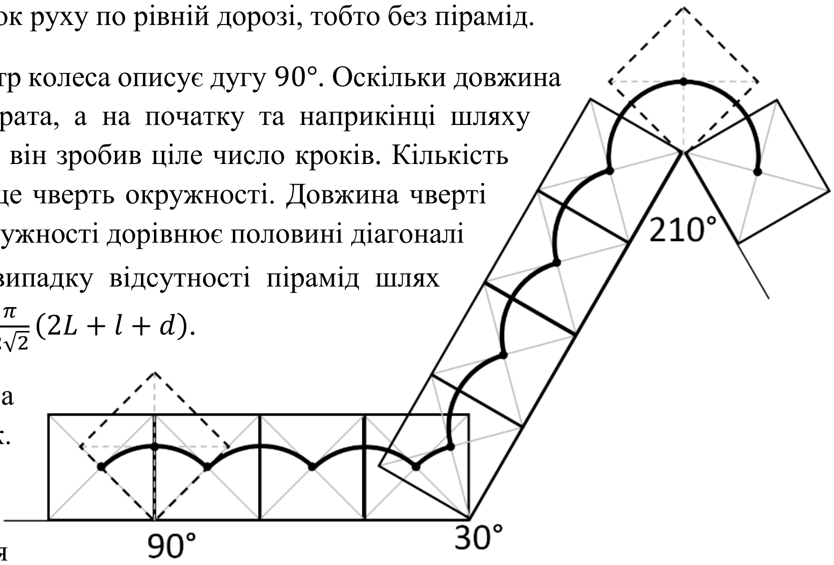
3. Нехай маса водню та природного газу m_1 та m_2, тобто маса палива становить $m_1 + m_2$. Тоді при згорянні палива виділилася кількість теплоти $q(m_1 + m_2)$, а на нагрівання вмісту чайника пішла теплота $kq(m_1 + m_2)$. Якщо в чайнику одночасно перебували вода та лід у стані рівноваги, то температура в ньому $0°C$. Якщо палива вистачило лише на плавлення льоду масою $\frac{m}{2}$, то ясно, що вся енергія від палива була використана на цей процес. Тому маємо $kq(m_1 + m_2) = \lambda \frac{m}{2}$, звідки $m_2 = \frac{\lambda m}{2kq} - m_1$. Енергія $q(m_1 + m_2)$, що виділилася при згорянні палива, дорівнює сумі енергій від двох компонент $q_1 m_1 + q_2 m_2$. Тому знаходимо $q = \frac{q_1 m_1 + q_2 m_2}{m_1 + m_2}$. Підставляючи в це рівняння вираз для m_2, отримуємо $m_1 = \frac{q - q_2}{q_1 - q_2} \frac{\lambda m}{2kq}$.

4. У цій задачі робота сили тертя використовується для нагрівання тіл. Робота сили тертя $A_\text{тер}$ дорівнює добутку сили та переміщення. Сила реакції опори становить mg, де m - це маса акваріума. Тому сила тертя буде kmg, де k - це коефіцієнт тертя. Під час руху акваріуму зі швидкістю v впродовж часу t акваріум зазнав переміщення vt. Отже, робота тертя $A_\text{тер} = kmgvt$. Якщо в навколишнє середовище втрачено частину енергії q, то на нагрівання йде енергія $A_\text{тер}(1 - q)$. Щоб нагріти акваріум та воду на температуру ΔT, потрібна енергія $Q_a + Q_\text{в} = c_c m \Delta T + c_\text{в} n m \Delta T$, де c_c та $c_\text{в}$ - питомі теплоємності сталі та води, а маса води у n разів більша за масу сталі. З рівняння перетворення енергії $A_\text{тер}(1 - q) = Q_a + Q_\text{в}$ отримуємо $\Delta T = \frac{(1-q)kgvt}{c_c + n c_\text{в}}$. Щоб знайти ККД такого методу нагрівання води η, маємо корисну роботу $Q_\text{в}$ розділити на виконану роботу $A_\text{тер}$. Знаходимо $\eta = (1 - q)\frac{n c_\text{в}}{c_c + n c_\text{в}}$. Підставляючи числові значення, дістаємо $\Delta T = 1{,}44°C, \eta = 10{,}5\%$.

5. Щоб отримати переміщення, потрібно знайти суму двох відстаней між вершинами пірамід L, ширини основи піраміди l та довжини сторони колеса d (див. малюнок). $S = 2L + l + d$. Підставляючи числові значення, отримуємо $S = 80 + 20 + 0.5 = 100{,}5$ (м)



Для знаходження шляху необхідно врахувати, що центр колеса рухається по дугах окружностей (див. малюнок). Розглянемо спочатку випадок руху по рівній дорозі, тобто без пірамід.



З малюнку видно, що за один крок центр колеса описує дугу 90°. Оскільки довжина дороги кратна довжині сторони квадрата, а на початку та наприкінці шляху квадрат розташований рівно, ясно, що він зробив ціле число кроків. Кількість кроків дорівнює $n = S/d$. Дуга 90° - це чверть окружності. Довжина чверті окружності становить $\pi r/2$, радіус окружності дорівнює половині діагоналі квадрата, тобто $r = d/\sqrt{2}$. Отже, у випадку відсутності пірамід шлях центру колеса становить $L_0 = \frac{S}{d}\frac{\pi d}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(2L + l + d)$.

У випадку з пірамідами центр колеса описує не завжди дугу 90° за один крок. Найпростіший спосіб підрахувати оберти - це подумки «розпрямити» дорогу. На малюнку показано, що біля основи піраміди квадрат описує 30° замість 90°. Це відбувається два рази - на початку та наприкінці піраміди, тобто сумарно бракує 120°. А на вершині піраміди маємо дугу 210° замість 90°, тобто тут «зайві» 120° компенсуються, тому в середньому на один крок все одно припадає чверть окружності. Щоб знайти кількість кроків, треба підрахувати довжину дороги по пірамідах. Оскільки кут при основі становить 60°, а піраміди є рівнобічними, то вони є рівносторонніми, тому до довжини рівної дороги маємо додати ще три ширини піраміди. Остаточно маємо $L_1 = \frac{S_1}{d}\frac{\pi d}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(2L + 4l + d) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}160{,}5$(м). Відношення двох шляхів становить $\frac{L_0}{L_1} = \frac{2L+l+d}{2L+4l+d} = \frac{100{,}5}{160{,}5}$. Оскільки колесо виконує сталу кількість обертів за секунду, відношення часів подорожей є таким самим.