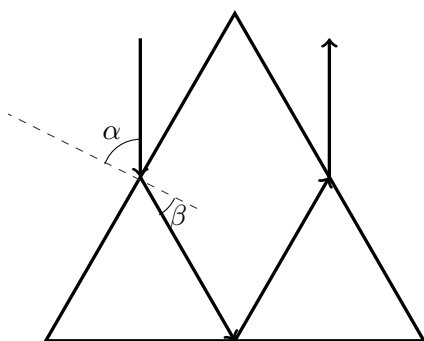


9 класс
Решение задач

Задача 1. Призма

Издатель газеты Джей Джона Джеймсон, в свободное от охоты за Человеком-Пауком время, исследует различные оптические системы. Сотрудники отдела как-раз подарили ему призму с сечением в виде равностороннего треугольника. Положив такую призму на одну из её граней, ДДД заметил, что луч света, падающий вертикально вниз в точности на середину боковой грани, отражается от нижней, и выходит из призмы посередине второй боковой грани вертикально вверх. Каков коэффициент преломления призмы?



Обозначим угол между падающим на боковую грань лучом и нормалью к ней α , а угол между преломлённым лучом и нормалью – β . Поскольку грань направлена под углом $\frac{\pi}{3}$ к горизонту, а падающий луч вертикален, то

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

Поскольку преломлённый луч проходит через середины граней, он является средней линией исходного правильного треугольника. Значит, угол между гранью и преломлённым лучом равен $\frac{\pi}{3}$. Следовательно,

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

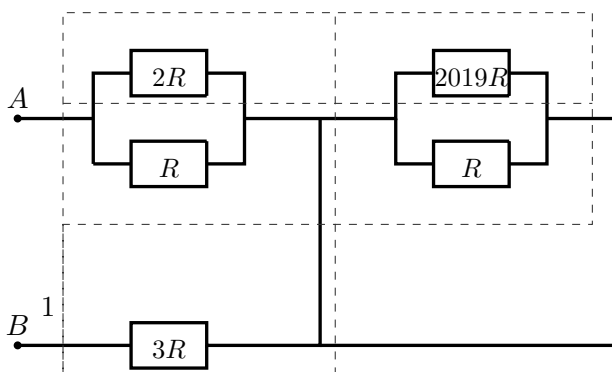
Между падающим и преломлённым лучами есть связь, выраженная законом Снеллиуса:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}.$$

Задача 2. Отопление

Мэри Джейн увлекается электротехникой, и, чтобы не мерзнуть зимой, собрала систему отопления из электрических обогревателей, показанную на рисунке. Пунктирными линиями обозначены стены, разделяющие комнаты. Определите, в которой из комнат будет жарче всего. А холоднее всего? Считайте, что теплее в той комнате, где батарея потребляет большую мощность. Чему равны значения мощностей, потребляемых обогревателями? Напряжение источника U .

Из схемы легко заметить, что на обогреватели с сопротивлениями $2019R$ и R ток поступать не будет, поскольку они параллельно подсоединены к проводнику с нулевым сопротивлением. Значит, холоднее всего будет в комнатах с этими двумя обогревателями,



а величина мощности в них равна нулю.

Поскольку обогреватели $2R$ и R соединены параллельно, то в каждом из них протекает только часть общего тока. А в обогревателе $3R$ протекает общий ток, и он имеет большее сопротивление. Таким образом, в комнате с обогревателем с $3R$ теплее всего. Посмотрим его значение мощности. Для начала найдём общее сопротивление цепи:

$$R = 3R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} = 3R + \frac{2R}{3} = \frac{11R}{3}.$$

Тогда легко находятся общая сила тока и мощность на $3R$:

$$I = \frac{3U}{11R}$$

$$P = I^2 \cdot 3R = \frac{27U^2}{121R}.$$

Задача 3. Кипятильник

После того, как обогреватели были установлены, Мэри Джейн решила подарить Питеру Паркеру собственноручно спаянный кипятильник. Она собрала электрическую цепь, состоящую из большого числа одинаковых проволочек (на рисунке обозначены как резисторы), каждая с сопротивлением R . К источнику Мэри Джейн подключила одну такую проволочку, которая с другой стороны расщепляется на 4 таких же, каждая из этих четырех также расщепляется на четыре, и так далее (см. рисунок). Помогите Питеру Паркеру определить, за какое время его новый кипятильник нагревает воду массы m от температуры T_1 до T_2 . Удельная теплоёмкость воды c , напряжение в сети U .

Обозначим сопротивление всей бесконечной цепи за R_x . Тогда исходя из того, что общее сопротивление состоит из резистора R и 4-х параллельно соединённых сопротивления R_x , имеем связь

$$R_x = R + \frac{R_x}{4} \Rightarrow R_x = \frac{4R}{3}.$$

Тепло, выделяемое данным кипятильником за время t ,

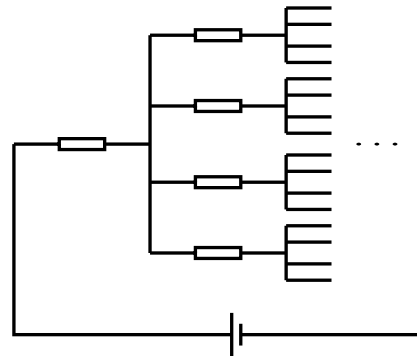
$$Q = Pt = \frac{U^2}{R_x} t = \frac{3U^2}{4R} t,$$

целиком идёт на нагрев воды, то есть

$$Q = cm(T_2 - T_1).$$

Приравнявая эти теплоты, находим время, необходимое на нагрев

$$t = \frac{4Rcm(T_2 - T_1)}{3U^2}.$$



Задача 4. Пробка

Сидя на крыше одного из небоскрёбов на Таймс-Сквер, Питер Паркер заметил растущую пробку на Седьмой авеню. Он оценил, что в пробке автомобили движутся однородным потоком со скоростью 10 км/ч, а вне пробки со скоростью 40 км/ч, причем на каждый километр в пробке приходится 500 автомобилей, а на километр вне пробки 200 автомобилей. С какой скоростью растёт автомобильная пробка на Седьмой авеню? Заметим, что на Седьмой авеню движение одностороннее.

Пусть плотность машин на километр до пробки и в пробке ρ_1 и ρ_2 соответственно, а скорости машин до пробки и в пробке – v_1 и v_2 . Рассмотрим, сколько машин в час добавляется к началу пробки

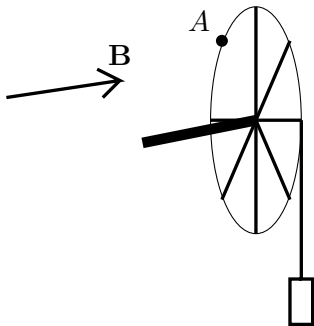
$$j = \rho_1 v_1 - \rho_2 v_2.$$

На каждый километр в пробку прибывает $\rho_2 - \rho_1$ автомобилей. Таким образом, скорость роста пробки, умноженная на количество прибавляющихся машин на километр, как раз и будет равна количеству машин, добавляющихся к пробке за час.

$$u(\rho_2 - \rho_1) = j \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_2 - \rho_1} = 10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Задача 5. Колесо в магнитном поле

Доктор Осьминог начал собирать новую магнитную ловушку, но после напряженной битвы с Питером Паркером от неё осталось только колесо от велосипеда радиуса R с n спицами. Не растерявшись, доктор Осьминог использовал его в качестве грузоподъемника. Он закрепил ось колеса горизонтально и стал пропускать через нее ток I . Заряд далее течет по спицам к ободу, после чего снимается в точке А (см. рисунок). Индукция магнитного поля B направлена вдоль оси. Какую максимальную массу может иметь груз, чтобы его можно было поднять с помощью данного устройства? Как влияет на ответ учёт сопротивления обода колеса?



Пусть по j -ой спице течёт ток I_j . Тогда на неё действует сила Ампера, равная

$$F_j = I_j R B.$$

Поскольку нет источников тока, то сумма токов в спицах равна току в оси, то есть $\sum_{j=1}^n I_j = I$.

Учитывая, что сила ампера приложена к серединам спиц, запишем правило рычага

$$mgR = \sum_{j=1}^n I_j R B \frac{R}{2} = \frac{IR^2 B}{2}.$$

Отсюда получаем максимальную массу груза

$$m = \frac{IRB}{2g}.$$

Заметим, что наличие сопротивления у обода приводит к тому, что ток распределяется неравномерно между спицами, поскольку для каждой из спиц заряд будет протекать до точки А через разные участки обода. Однако в ответ входит лишь сумма токов, а она всегда равна току в оси, то есть I . Следовательно, ответ останется прежним.